Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра общей физики

Осташев В.Б.

Часть I
Механика

Конспект лекций

Санкт-Петербург

2025

УДК 531/534

Осташев В.Б. «Часть I. Механика»: Конспект лекций. СПбГТИ(ТУ). СПб, 2025,– 144 с.

В лекциях рассмотрены …,

…

…

…

…

…

…

…

Лекции соответствуют следующим компетенциям подготовки специалистов всех направлений: ОК-1, ОК-3, ОК-6, ПК-3, ПК-4, ПК-10.

Рис. 36, табл. 2, библиогр. 4 назв.

Рецензент:

…

Утверждено на заседании методического Совета _____________ ____ факультета СПГТИ(ТУ). Протокол № __, «__».________.20__г.

Часть I. Механика

Содержание

Принятые основные обозначения

Df. – определение,
Th. – теорема,
$]$ – пусть,
$[$ – тогда
t – время, [с].
$\overline{r}$ – радиус-вектор, [м],
$r = |\overline{r}|$ – абсолютное значение (*длина*) радиус-вектора, [м],
$\Delta\overline{r}$ – перемещение (*вектор перемещения*), [м],
$d\overline{r}$ – элементарное перемещение, [м],
S – путь (*длина пути*), [м],
dS – элементарная длина пути, [м],
$d\overline{l}$ – элементарный вектор касательной к кривой, [м],
$\overline{\mathrm{v}} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$ – вектор скорости, [м/с],
$\mathrm{v} = |\overline{\mathrm{v}}|$ – абсолютное значение вектора скорости, [м/с],
$\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$ – скалярная скорость, [м/с],
$\overline{a}$ – ускорение, [м/с^2],
$\overline{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение, [м/с^2],
$\overline{a}_n$ – нормальное ускорение, [м/с^2],
$\overline{\tau}$ – единичный вектор касательной, [–],
$\overline{n}$ – единичный вектор нормали, [–],
$\overline{e}_r = \dfrac{\overline{r}_{12}}{r_{12}}$ – единичный вектор направления (параллелен вектору $\overline{r}_{12}$), [–],
φ – угол поворота, [–], [*рад*.],
$\overline{\omega}$ – угловая скорость, [с$^{-1}$], [*рад/с*.],
$\overline{\varepsilon}$ – угловое ускорение, [с$^{-2}$], [*рад/с*^{2}.],
$\overline{F}$ – сила, [Н],
m – масса, [кг],
$\overline{p}$ – импульс, [кг·м/с],
k – коэффициент упругости, [Н/м],
μ – коэффициент терния, [–],

σ', σ''	– коэффициент сопротивления, [–],
$\bar{\mathrm{M}}$	– момент силы, [Н·м],
$\bar{L}$	– момент импульса, [м/с],
I	– момент инерции, [м/с],
A	– работа, [Дж],
E	– энергия, [Дж],
T	– кинетическая энергия, [Дж],
U	– потенциальная энергия (*потенциальная энергия тела*), [Дж],
$\bar{g}$	– ускорение свободного падения, [м/с^2],
R	– радиус (*радиус окружности, радиус кривизны*), кратчайшее расстояние до оси вращения [м],
V	– объём, [м^3],
$\rho = \dfrac{m}{V}$	– плотность, [кг/м^3],
$d\ldots$	– значок элементарной величины, элементарного приращения или дифференциала (*с математической точки зрения*).
$<\ldots>$	– средняя величина.

Мелким шрифтом выделены фрагменты, где даётся либо дополнительная информация, либо дополнительное разъяснение. И то и другое, при желании можно опустить.

Все доказательства и вывод формул выделены чертой с левой стороны текста. Если данное доказательство или данный вывод по тем или иным причинам не представляют интереса, этот текст можно опустить без потери качества излагаемого материала.

В ряде случаев в тексте могут встречаться пометки:

«⇒ *необходимый минимум…*».

Они обозначают, что для ответа на «хорошо» и «отлично» желательно знать вывод данного утверждения (*закона, теоремы, соотношения…*) как минимум до данной отметки.

Помимо мелкого шрифта в тексте имеются пометки следующего вида:

«⇒ *дальше можно пропустить*…»

Эти пометки идут в паре с:

«⇐ *можно пропустить досюда*…»

«В скобках» из этих пометок располагается текст, явно выходящий за рамки официального курса и приводящийся для общей грамотности и развития.

Также в тексте могут присутствовать следующие пометки – «операторные скобки»:

«⇒ *<u>математические определения и теоремы</u>*…»

Эти пометки идут в паре с:

«⇐ *конец математических определений и теорем*…»

«В скобках» из этих пометок располагается информация, не имеющая прямого отношения к физике, а относящаяся к *математике*. Однако ряд из этих определений или теорем так или иначе может встретится в вопросах к коллоквиуму и экзамену.

Физика как наука

<u>Базовые принципы.</u> При построении теории, то есть научной картины видения мира, мы будем придерживаться двух принципов.

1. В математике принято считать (*как основу любого рассуждения*), что ***отсутствие доказательство ещё не является доказательством отсутствия***… То есть, если мы ещё не наблюдали какое-то явление либо не можем повторить эксперимент, в котором, якобы оно наблюдалось, это ещё не значит, что его не существует.
2. В физике принято считать, что ***если некое явление, факт не наблюдались в прямом или косвенном физическом эксперименте, то они считаются несуществующими***. То есть, если начать верить всем необоснованным гипотезам и яко бы наблюдавшимся факта, физика перестанет быть наукой. Мы принимаем к рассмотрению только те факты, которые имеют экспериментальное подтверждение, которое мы, в частности, тоже можем проверить.

Суммирую первый и второй принцип, скажем, что мы будем стоять на следующие позиции

1. За реально существующие мы будем признавать только те факты и явления, которые имеют экспериментальное подтверждение.
2. Мы будим допускать право на существование научных гипотез (*утверждений, ещё не имеющих экспериментального подтверждения*), если они не противоречат существующим, доказанным теориям и концепциям.

Поясним на небольшом нестандартном примере. Если мы смотрим на мир более-менее реалистично, мы все прекрасно понимаем, что ни вечного двигателя ни машины времени быть не может. Однако задумаемся. Существование вечного двигателя (*как первого, так и второго рода*) вступает в противоречие с базовыми, фундаментальными законами физики (*первого рода – с законом сохранения энергии и, как следствие с первым началом термодинамики, второго рода – со вторым началом термодинамики*). Эти законы, многократно доказаны и проварены экспериментально. И, как мы покажем дальше, должны быть сохранены в любом дальнейшем расширении физики. Ни один серьёзный человек (*серьёзно относящейся к физике, как к науке*) не будет даже разговаривать с Вами, если вы даже заговорите о вечном двигателе. Машины времени, как мы знаем, тоже не существует. Однако, существуют серьёзные физико-математические доказательства, что её существование не противоречит ни одному физическому закону (*существование времениподобных замкнутых кривых в пространстве Минковского, в принципе, не нарушает ни один из физических законов*). Машину времени никто не видел вживую и, следовательно, она не существует. Но принципиальное её существование противоречит скорее нашему обыденному сознанию, нежели чем физики (существуют серьёзные научные работы в рамках признанной на сегодняшней день физики, как науки, которые доказывают этот факт). Серьёзный физик, конечно, не поверит Вам, если Вы будите рассказывать ему, что создали такую машину. Но он и не будет считать Вас за сумашедьшего, если вы будите заниматься научной деятельностью в этом направлении.

<u>Предмет физики</u>: **<u>физика</u>** - наука о простейших и наиболее общих закономерностях, явлениях природы, строении материи, её движении. Пространство и время - не материя.

В основе построения физической теории лежит ***<u>метод принципа.</u>*** Базовые принципы, постулаты не доказываются и не выводятся ни из каких других теоретических представлений, а утверждаются на базе рассмотрения поведения материального мира, следуют из наблюдений и экспериментов.

<u>Схема построения теории</u>:

$$опыт \quad (наблюдения) \to гипотеза \to эксперимент \to теория$$

$$(\to расширение \quad теори \to эксперимент \to новая \quad теория \to ...)$$

Эксперимент – наблюдение объекта в точно контролируемых (воспроизводимых) условиях. Иногда воспроизводимость может пониматься нами лишь в смысле строгой контролируемости условий и параметров процесса. Наблюдение взрыва сверхновой звезды есть эксперимент, однако, мы вряд ли сможем когда-нибудь его повторить. В этом случае, под воспроизводимостью понимается возможность ответить на вопрос – является ли следующее наблюдение взрыва сверхновой экспериментом, схожим с этим, или у них есть принципиальные отличия.

Возможными различиями между наблюдениями и экспериментом может являться спонтанность первых и планомерное построение вторых. Пример: яблоко, упавшее на голову Ньютону есть наблюдении, из которого он сделал правильные научные выводы, сформировавшиеся в научную гипотезу. А, вот, шары, которые он бросал с кривой Пизанской башни – спланированный эксперимент. Результатом его явилась теория тяготения Ньютона. *Далее*. Расширением теории будет её применение ни только к области земного тяготения, но и к построению, поведению планет в Солнечной системе. Однако тут мы уже можем нарваться на противоречия (перигелий Меркурия объясним только с точки зрения Общей Теории Относительности), что приведет к необходимости новых экспериментов и построению новой теории.

<u>Математика и физика</u>:

Математика является языком, на котором излагается физическая теория. Математическая логика и логика математического вывода является той логикой, на базе которой строится теория, начиная с базовых постулатов и принципов. Наконец, математический аппарат – это аппарат построения математических моделей, которыми мы заменяем реальные физические объекты в процессе построения физических теорий. В связи с этим не стоит путать физические объекты (объекты реального, материального мира) и их математические модели.

<u>Структура курса</u>:

Наш курс будет состоять из следующих разделов: механика, электромагнетизм, общая теория колебаний и волн, оптика, теория макросистем (*молекулярная физика, термодинамика, статистическая физика*), физика микромира (*квантовая оптика, квантовая механика, физика твёрдого тела, квантовая теория поля…*).

Под *механикой* мы будем понимать *классическую механику – механику Галилея-Ньютона*. *Квантовую механику* мы будем рассматривать отдельно, как *раздел физики микромира*. Вообще, если воспринимать механику (*теорию механического движения – то есть изменения координат тел в пространстве с течением времени*) и общую теорию колебаний и волн (*теорию периодических **процессов**, возмущений и **процессов** их распространение в пространстве с течением времени*), как различные разделы физики, механику и квантовую механику следует считать *схожими только по названию*. Это очевидно, поскольку квантовая механика не рассматривает как таковое изменение координат объекта, а изучает вероятность тех или иных процессов, происходящих с объектом в промежутке между двумя взаимодействиями. В этом смысле квантовая механика гораздо ближе по смыслу к теории волн и статистической физики (*включена в теорию макросистем*), как теориям, уделяющим гораздо большее внимание не самим объектам материального мира, а процессам, с ними происходящим.

Что касается *специальной теории относительности* (СТО). По существу, она, как и *общая теория относительности* (ОТО) Альберта Эйнштейна не рассматривает процесс движения как процесс изменения координат тела в пространстве с течением времени, а имеет дело с преобразованием координат в 4-хмерном пространстве-времени и переходу от одной системы координат к другой. Таким образом, и СТО и ОТО являются, скорее, элементами теории поля, нежели разделом механики. Тем не менее, за неимением в составе курса раздела «Теория поля», мы рассмотрим СТО в рамках механики. Об ОТО мы так же скажем пару слов в этом разделе. И, тем не менее, не стоит сбрасывать со щита вышеприведённое замечание.

Также отметим, что мы оставим процесс последовательного построения теории (*построения всех её формул и соотношений исходя из базовых принципов, метод принципа*) для науки под названием *теоретическая физика*. Мы же постараемся идти от первых опытов и экспериментов, строя теорию в той последовательности, в которой она развивалась исторически. В связи с этим отметим, что на данный момент под *механикой* мы будем понимать *классическую механику Ньютона*. О существовании СТО и ОТО на данный момент мы как бы не знаем ☺. Однако, не смотря на всё это, по ходу рассуждений мы будем периодически забегать в перёд и пояснять, как излагаемые нами принципы видоизменятся с точки зрения СТО, ОТО или даже, возможно, с точки зрения квантовой механики.

1. Физические основы механики

Механика – это наука, изучающая самый простой вид движения материи – механическое движение, т.е. изменение положения тел в пространстве с течением времени (изменение взаимного расположения тел).

1.1. Пространство и время

Df 0. ***Материя*** ***(диалектический материализм)*** – объективная реальность, данная нам в ощущениях.

Замечание 1. Под ощущениями будим понимать не только восприятие при помощи пяти органов чувств, но так же результаты прямых или косвенных экспериментов. Конкретнее – воспринимаемые нашими органами чувств, результаты прямых физических измерений либо расчётов, произведённых по результатам (*прямых или косвенных*) физических измерений (*косвенные измерения*).

Замечание 2. *Аристотель* «То, из чего возникают и состоят вещи» (*определение неполно, т.к. не все формы материи подпадают под него…*); *Платон* «Бесконечно делимых континуум, пространство» (*не верно, как с точки зрения определения физического* *пространства, так и с точки зрения квантовой механики*); новоевропейский материализм: «Вещество или тело, обладающее инертностью, т.е. массой, и непроницаемостью, т.е. плотностью, твёрдостью» (*определение неполно*)… Вообще, в современной философии нет чёткого и единого определения, как материи так и пространства и времени. Именно по этому мы остановимся на чётко сформулированном определении диомата.

Замечание 3. На сегодняшний день известно две формы существования материи – вещество и поле (*физическое поле, не путать с понятием «поле» в метематике*). Сущность первого вам давно известна, хотя бы, из курса химии. О втором мы поговорим чуть позже.

Df 1. ***Пространство*** ***(физическое пространство)*** *– есть свойство взаимного расположения материальных тел.* Если стоять на материалистических позициях и считать, что всё, что мы реально наблюдаем вокруг себя есть материя – *«объективная реальность, данная нам в ощущениях»*, то придётся признать, что реальные наблюдения в ходе физических экспериментов мы проводим над телами – суть воплощение вещества, одной из форм материи. Пространство – есть свойство этих тел быть ближе или дальше от нас, находиться справа, слева, сверху или снизу, а отнюдь, не огромный мешок, куда это всё положено…

Df 2. ***Время*** ***(физическое время)*** *– есть свойство последовательности событий* (Свойство материальных тел иметь последовательность событий…). Под ***событием*** будем понимать однократный акт *физического наблюдения*, наблюдения некоторого физического явления. Шкала времени определяется посредством циклических процессов. Часы-ходики на стене – положение маятника в крайней правой (или крайней левой) позиции есть наши наблюдения над поведением физического тела – часов. Последовательность этих событий и есть время, а их периодичность задаёт его шкалу.

Замечание 4. В философии (*по крайней мере, в ряде философских учений*) *пространств*о и *время* считаются *формой существования материи*. Однако мы будим отталкиваться от определений, прилагаемых в учебниках физики, которые приведены выше.

Замечание 5. Мы будим различать объекты реального (*материального*) мира и их модели, созданные в рамках той или иной теории. Объекты реального мира и явления (*процессы, происходящие с ними*) существуют независимо от нас и наших попыток их изучать. Модели – это те уравнения, формулы, параметры, которыми мы пытаемся описывать эти объекты и явления в рамках той или иной теории. Они существуют только в нашей голове и помогают нам понять и объяснить окружающий нас мир и явления, происходящие в нём. В первом приближении мы можем сказать, что суть явления всемирного тяготения заключается в том, что камень падает сверху вниз. А вот на формулу, описывающую ньютоновскую теорию тяготения Миру глубоко наплевать – она существует только у нас в голове и помогает нам понять, КАК ЭТО ВСЁ ПРОИСХОДИТ.

Пространство и время не элементы материального мира, а его свойства.

Моделью пространства в классической Ньютоновской механике является трёхмерное векторное пространство $\mathbb{R}^3$, трёхмерное Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Как доказывается в математике, в любом векторном пространстве можно ввести систему координат (*Однако, отнюдь не всегда это* *является необходимым, с точки зрения решения физических задач*). Моделью времени является числовая ось $\mathbb{R} \equiv t$.

Расстояния в системе СИ измеряются в *метрах* [м], время – в *секундах* [с]. С системой единиц СИ мы познакомимся в начале раздела «Динамика».

Свойства пространства и времени:

– пространство однородно и изотропно;

– время – однородно.

Однородность – одинаковость свойств в различных точках.

Изотропность – одинаковость свойств в различном направлении.

Эти свойства однозначно присущи пространству и времени, по крайней мере, в рамках классической механики. Всё, что касается более общих взглядов на пространство и время, например в рамках Общей Теории Относительности, возможно, будет рассмотрено в процессе изучения курса.

1.2. Базовые определения

Df 1. ***Тело*** ***(физическое тело)*** – определение лежит в области философии. Элемент материи (*определение понятия материи будет чуть ниже, хотя его смысл вполне очевиден*), рассматриваемый как единое целое при изучении физической картины мира, единичный объект, лежащий в основе рассмотрения в ходе физического эксперимента.

Df 2. ***Материальная точка*** – тело, размерами которого можно пренебречь. Математической моделью материальной точки является геометрическая точка, наделенная физическими свойствами. В зависимости от рассматриваемой системы за материальные точки можно принимать: брошенный камень (с точки зрения траектории его полета), планеты (с точки зрения солнечной системы), звезды (с точки зрения галактики). Наиболее удобными объектами для представления материальной точки являются элементарные частицы с точки зрения классической механики. В этом случае объект называют частицей.

Df 3. ***Механическая система*** – одно или несколько тел, рассматриваемых в совокупности.

Df 4. ***Система материальных точек*** – механическая система, каждое тело которой может рассматриваться, как материальная точка.

Замечания.

1. Механическая система (в частности система материальных точек) может состоять из бесконечного числа элементов. В этом случае, говорим о бесконечной системе (бесконечной системе материальных точек…).
2. Под материальной точкой можно также понимать бесконечно малый объем некоего тела. В этом случае некоторые физические характеристики (в частности, ее масса) будут иметь бесконечно малую величину.

Наиболее адекватный всеобщему представлению пример системы материальных точек – система частиц. Тем не менее, система планет, с точки зрения Солнечной системы, система звёзд, с точки зрения Галактики – также являются системой материальных точек.

Df 5. ***Сплошная среда*** – область пространства, каждая точка которой может рассматриваться, как материальная точка (*поток воды, например, если не рассматривать его с точки зрения термодинамики или квантовой механики, а стоять на позиции классической гидродинамики*).

Иначе. Механическая система бесконечного числа элементов, расположенных в конечном объёме пространства.

Df 6. ***Абсолютно твердое*** ***тело*** – тело, деформацией которого можно пренебречь (взаимное расположение любых двух материальных точек того типа остается неизменным).

Df 7. ***Замкнутая система*** – система тел, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующие с другими телами (не взаимодействуют с окружающей средой). Также может называться ***изолированной*** системой.

Замечания.

1. Любое абсолютно твёрдое тело может быть представлено как бесконечная система материальных точек. Разобьём тело на бесконечное количество бесконечно малых частей. Каждая из этих частей будет представлять собой материальную точку. Её размеры пренебрежимо малы, а количество таких материальных точек, составляющих исходное тело бесконечно велико.

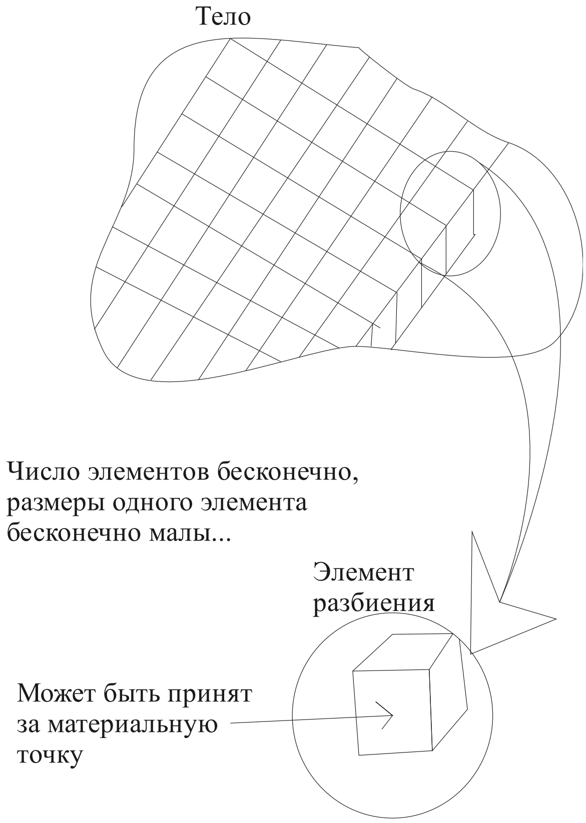


Рисунок 1.1

Тело, как бесконечная система материальных точек

2. Таким образом, с точки зрения приведённого выше определения, любое твердое тело может быть рассмотрено, как сплошная среда.
3. В данном контексте, условие отсутствия деформации может быть переформулировано, как условие неизменности расстояния между любыми двумя (а, следовательно, между всеми…) точками, составляющими данное тело.

Df. ***(дополнительное)***: ***Элементарной физической величиной*** называется бесконечно малая (физически малая, пренебрежимо малая…) величина. Обозначается ***d…*** (иногда δ…). В математике элементарная величина эквивалентна понятию дифференциала (дифференциал независимой переменной *dx* – бесконечно малое приращение аргумента *x*, дифференциал функции *dy* – бесконечно малое приращение значения функции, $dy = f'(x)\cdot dx$). Таким образом, к элементарным величинам полностью применим аппарат дифференцирования (говоря об элементарной величине, мы говорим о дифференциале значения самой величины). Действие обратное данному есть интеграл. Чтобы *«превратить»* элементарную величину в значение самой физической величины нужно взять интеграл.

dx – элементарная длина, элементарное приращение длины,

dA – элементарная работа,

$A = \int dA$ – работа, рассчитанная, как интеграл от элементарной работы,

$d\overline{r}$ – элементарное приращение радиус-вектора, элементарное перемещение.

1.3. Система отсчёта и система координат

Для количественного рассмотрения механического движения необходимо ввести ***систему отсчета*** **(СО)**.

Df. Под системой отсчета понимается совокупность двух элементов: ***тела отсчета***, с которым связывается *начало отсчёта* и ***часов***.

Замечания.

1. Для полного построения СО необходимо выбрать связанную с телом отсчёта материальную точку – начало отсчёта, с которой будет связано начало координат математического 3-хмерного евклидова (векторного) пространства $\mathbb{R}^3$.
   1.1. Необходимость выбора начала отсчёта связано с тем, что на самом деле моделью нашего физического пространства является не *векторное*, а *аффинное пространство*. В отличии от векторного пространства, в аффинном помимо векторов («стрелочек») существуют ещё и точки. Вектора соединяют между собой точки и для них определено правило сложения (в своём, векторном пространстве). Однако, выбрав отдельную точку, и, приняв её на выделенный *центр*, из которого берут начало все вектора, мы превращаем наше аффинное пространство в векторное. Для аффинного пространства существует и своё отдельное преобразование координат – *аффинное преобразование*. Это перенос начала координат (выбранного центра) из одной точки в другую. И подчиняется здесь всё обычному правилу сложение векторов. Это преобразование мы разберём чуть ниже.
   1.2. В контексте конкретной задачи тело отсчёта может быть принято за материальную точку. В этом случае проблема, связанная с выбором начала отсчёта, отпадает сама собой – тело отсчёта само становиться началом отсчёта.
   1.3. Выбрав начло отсчёта, мы связываем с нашим физически пространством математическое евклидово (векторное) пространство $\mathbb{R}^3$. В математике (конкретнее в *линейной алгебре*, занимающейся теорией линейных или векторных пространств) доказывается, что в любом векторном пространстве можно задать базис, состоящий из $\boldsymbol{n}$ линейно-независимых векторов (где $\boldsymbol{n}$ – размерность векторного пространства, в нашем случае $\boldsymbol{n}$**=3**). Этот базис задаст систему координат. И обычно мы выбираем ортонормированный базис с декартовой системой координат. Однако, как можно показать в ходе решения ряда задач, выбирать (задавать) конкретный базис и конкретную систему координат нет необходимости – вектора всё равно остаются векторами и не перестают существовать даже в отсутствии базиса и системы координат. Если представлять вектор, как

«стрелочку» или «направленный отрезок», то для его изображения, очевидно, нам совершенно нет необходимости рисовать направленные куда-то конкретно оси $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ и $\overrightarrow{OZ}$. Эти задачи могут быть решены исходя из общих свойств линейности векторов и правила их сложения.

1.4. В рамках конкретно решаемой задачи тело отсчёта мы обычно мы можем принять за абсолютно твёрдое тело, то есть пренебречь возможными его деформациями и считать взаимное расположение его точек неизменным. В этом случае, как будет показано ниже, *скорость не будут зависеть от того, какую конкретно точку тела отсчёта мы приняли за само начало отсчёта* (скорость отдельных материальных точек и тел в данной СО). В принципе, уже этого достаточно, чтобы понять – кинематика движения материальной точки и тела полностью будет определяться выбором тела отсчёта, даже если конкретная точка начала отсчёта ещё не задана. Также от выбора начала отсчёта не зависит *угловая скорость*. Что касается динамики, величина силы, как меры взаимодействия и так не зависит от системы отсчёта (об этом мы поговорим позже). От выбора конкретного центра не будет зависеть и *суммарный момент пары сил, рассчитанный относительно этого центра*.

1.5. Выбор конкретного начала отсчёта и системы координат станет необходим, если мы захотим от векторов перейти к их проекциям и записи/решению системы уравнений.

2. Поскольку мы считаем тело отсчёта абсолютно твердым и после выбора начала отсчёта все материальные точки самого тела отсчёта будут связаны с указывающими на них радиус-векторами, в случае вращения тела отсчёта система координат и сама СО будут вращаться вместе с ним. В принципе, как и всё движение, вращательное движение относительно, и мы никогда не докажем, что именно вращается – СО или вся Вселенная вокруг СО. Вопрос отпадёт, когда вместе с *I законом Ньютона* мы введём понятие *инерциальных систем отсчёта*. Тогда за вращающиеся СО мы примем СО, вращающиеся относительно инерциальных.
3. Наличие часов подразумевает выбранное начало отсчета времени по связанному с ним событию (хотя бы, даже, посмотрели на часы…). Масштаб времени задаётся некоторым циклическим процессом (периодическое движение маятника). При этом физическим временем связывается числовая ось, задающая его математическое представление.

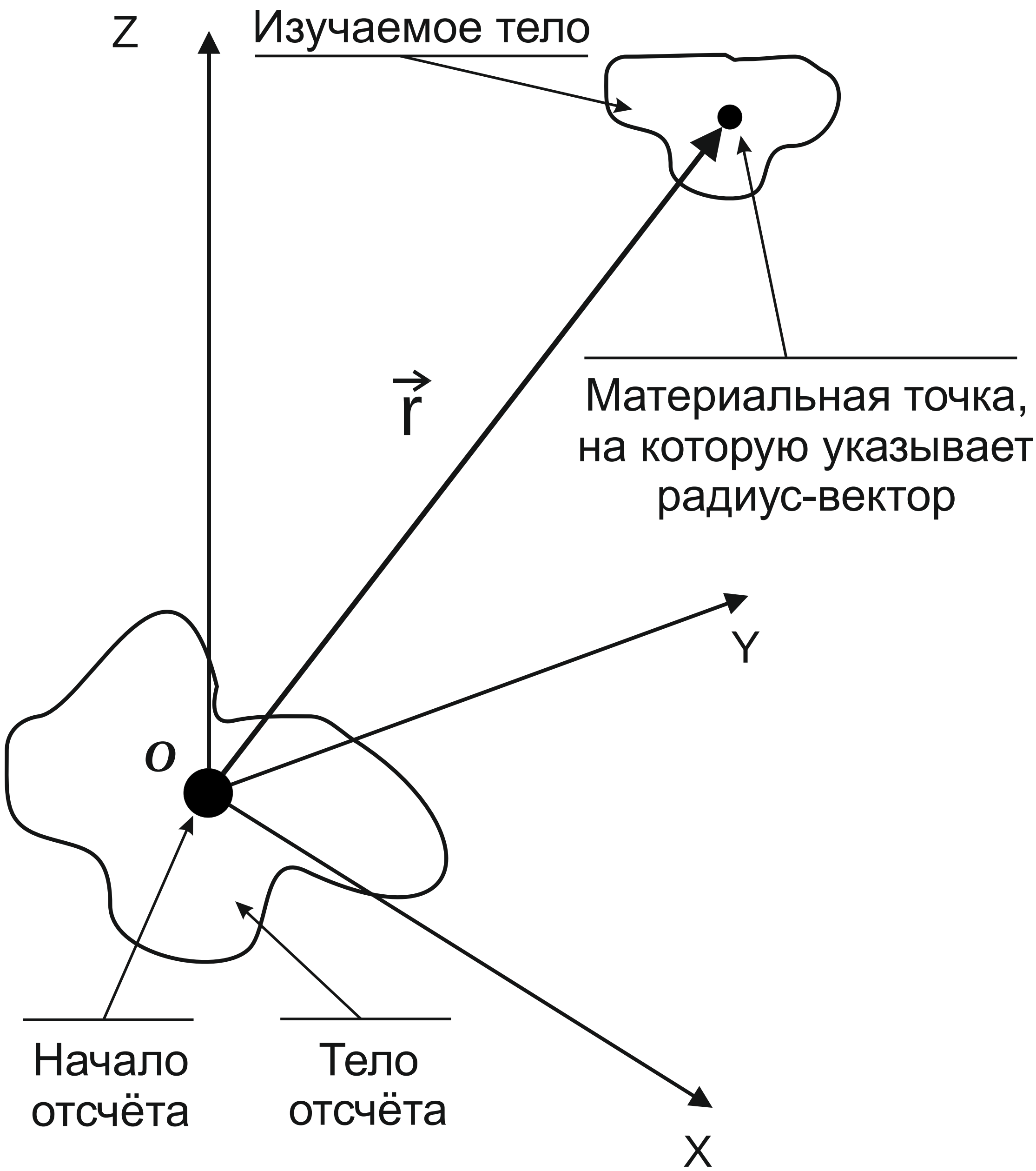


Рисунок 1.2
Система отсчёта и система координат

2. Кинематика

<u>Кинематика</u> – наука, изучающая движение, как таковое, не вдаваясь в подробности причин его возникновения (*т.е. во взаимодействия*).

2.1. Вводные определения

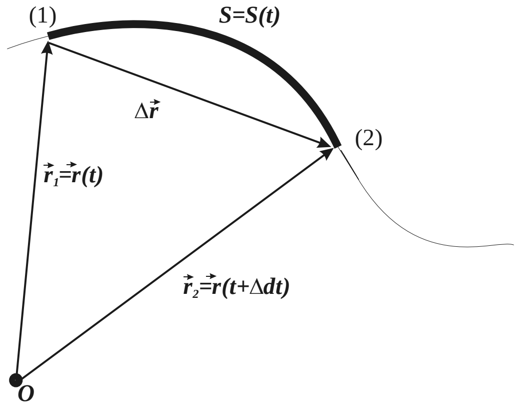


Рисунок 2.1
Траектория, путь перемещение

На Рисунок 2.1:
(1) – положение тела в момент времени t;
(2) – положение тела в момент времени t+Δt.

<u>Df 1.</u> ***<u>Траектория</u>*** – кривая, описываемая телом во время движения.

<u>Df 2.</u> ***<u>Путь (длина пути)</u>*** – (***S=S(t)***) расстояние, пройденное телом и рассчитанное по траектории (длина параметризированная кривой).

Пояснение. Автомобиль совершил поездку из Петербурга в Москву и обратно. Длина пути будет в два раза превосходить длину кривой, по которой он двигался – трассу E105 (*длину шоссе С.Петербург-Москва*).

Измеряется в *метрах,* [м].[1]

<u>Df 3.</u> ***<u>Перемещение (вектор перемещения)</u>*** – ($\Delta\overline{r} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$) вектор, проведенный из точки начального положения тела в точку его конечного положения.

Измеряется в *метрах,* [м].

Замечание. Из рисунка и определения видно, что перемещение является одновременно приращением радиус-вектора. Это достаточно важно, в частности, в определении скорости.

<u>Df 4.</u> ***<u>Скорость</u>*** – первая производная радиус-вектора по времени.

$$\overline{\mathrm{v}} := \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

Измеряется в *метрах в секунду,* $[м/с] = \frac{[м]}{[с]}$

[1] Мы будем по возможности приводить единицы измерения тех вводимых величин. С системами единиц мы познакомимся несколько позже.

Df 5. ***Ускорение*** – первая производная скорости по времени или вторая производная радиус-вектора по времени.

Измеряется в *метрах на секунду в квадрате,* $\left[м/c^2 \right] = \dfrac{[м]}{[c]^2}$.

$$\bar{a} := \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \qquad (2.2)$$

⇒ *математические определения и теоремы…*

Замечания о математических обозначениях (*и основные определения*):

1. ***Производная***

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

($\dfrac{d}{dx}$*—эквивалентное обозначение производной по независимой переменной x)*

2. $\boldsymbol{dx}$ *–* ***дифференциал***

Дифференциал независимой переменной ***dx*** есть бесконечно малое приращение этой переменной.

Дифференциал функции ***dy=df(x)*** есть бесконечно малое приращение функции при бесконечно малом приращении аргумента.

$$dx := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$dy := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y$$

Производная равна отношению дифференциалов

$$y' = \underbrace{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d(y)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{производная в разных обозначениях}} = \underbrace{\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x} = \frac{(dy)}{(dx)} = \frac{dy}{dx}}_{\text{отношение дифференциалов}}.$$

Вначале вышеприведённой строки соотношение $\dfrac{dy}{dx}$ – всего лишь эквивалентное обозначение производной, в конце вывода $\dfrac{dy}{dx}$ – операция деления одного дифференциала на другой.

Отсюда: $dy = f'(x)dx$.

Производная сложной функции:

$$\{z = f_1(y), y = f_2(x)\} \Rightarrow z = f_1(f_2(x)).$$

Тогда:

$$z'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x).$$

В итоге, учитывая предыдущие рассуждения о дифференциалах, эквивалентны следующие рассуждения:

- если переменная z является функцией от переменной y, а та, в свою очередь – функцией переменной x, производную z по x можно взять следующим образом:

$$\frac{d}{dx}(z(x)) = \frac{d}{dy}(f_1(y)) \cdot \frac{d}{dx}(f_2(x)),$$

- с другой стороны, мы можем представить производные, как отношение дифференциалов и обращаться с ними, как с дробями:

$$\frac{dz}{\cancel{dy}} \cdot \frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Физики обычно предпочитают второй вариант. ☺

3. ***Ньютоновская система обозначений производных*** (*принята для производных по времени*):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt},$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Так скорость в этой системе обозначений:

$$\bar{\mathrm{v}} = \dot{\bar{r}}$$

4. ***Вторые, третьи (кратные) производные***:

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(dy)}{dx \cdot dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{d\left(d\left(dy\right)\right)}{dx\cdot dx\cdot dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

5. ***Производная от вектор-функции*** берется по координатам
Пусть:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

Тогда:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{d(x\bar{i})}{dt} + \frac{d(y\bar{j})}{dt} + \frac{d(z\bar{k})}{dt} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

Отсюда:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}.$$

6. ***Интеграл.***

Пусть ***f(x)*** есть производная ***F(x)***. Тогда ***F(x)*** называется первообразной для ***f(x)***:

$$f(x) = F'(x)$$

или

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}$$

В этом случае неопределённым интегралом от ***f(x)*** называется класс функций – первообразных для данной функции:

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = \text{const}.$$

Определённый интеграл определяется, как площадь криволинейной трапеции:

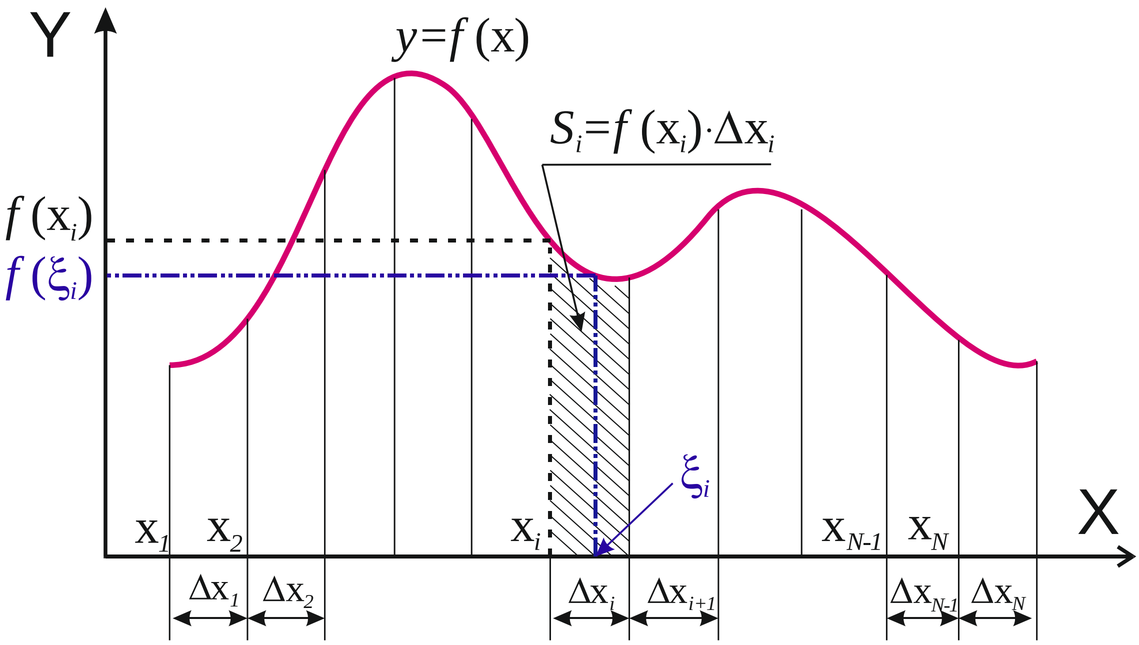


Рисунок 2.2

Определённый интеграл, как площадь криволинейной трапеции

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} S_i\right) = \lim_{\Delta x_i\to 0,\forall i}\left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x_i\right).$$

Все вышеприведённые определения совершенно эквивалентны.

Определённый интеграл равен разности первообразных на верхней и нижней границах:

$$f(x) = F'(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

7. ***Интегралы и дифференциалы*** *– общие моменты*.

Сначала вспомним, что интеграл от самого «$\boldsymbol{dx}$» (когда под интегралом ничего не стоит) равен самому $\boldsymbol{x}$. Так для неопределённого интеграла это будет выглядеть следующим образом:

$$\int dx = x + C.$$

Вспомним также, что интеграл от производной есть сама функция, стоящая под производной. Для неопределённого интеграла это утверждение можно записать так:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

или так

$$\int F'(x)\,dx = \int d\big(F(x)\big) = F(x) + C.$$

Также, если под интегралом стоит производная некоторой функции, мы можем произвести замену переменной:

$$\int g(x)F'(x)\,dx = \int g(x)\,d\big(F(x)\big) =$$

$$= \begin{Bmatrix} t = F(x) \\ u(t) = F^{-1}(t) \end{Bmatrix} = \int g\big(u(t)\big)\,dt.$$

Всё это мы можем выразить другим образом, на языка производных и дифференциалов. Величина $\boldsymbol{dx}$, по которой производится интегрирование называется *мерой*. Так вот, можно доказать, что любой дифференциал является мерой. И, произведя какие-либо преобразования с дифференциалами, аналогичные преобразования мы можем произвести под интегралом с мерой:

$$f(x)\,dx = F'(x)\,dx = d\big(F(x)\big) \Rightarrow$$

$$\int g(x)\,f(x)\,dx = \int g(x)\,d\big(F(x)\big).$$

Либо, переходя окончательно от языка производных к языку дифференциалов, и, заменяя производную отношением дифференциалов (вспоминая, что дифференциалы можно сокращать, как обыкновенные дроби), мы можем представить последние преобразования следующим образом:

$$f(x)\,dx = \frac{dF(x)}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = d\big(F(x)\big) \Rightarrow$$

$$\int g(x)\frac{dF(x)}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int g(x)\,d\big(F(x)\big).$$

В этом случае (и при подобной форме записи) логичным становится следующее преобразование:

$$\int \frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = \int dy = y + C.$$

Все вышеприведённые рассуждения справедливы как для неопределённого, так и для определённого интеграла.

8. ***Аналогично производной, можно говорить об интеграле от вектор-функции*** (по скалярной переменной)

$$\int \overline{r}dt = \int x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\,dt = \int x\overline{i}\,dt + \int y\overline{j}\,dt + \int z\overline{k}\,dt =$$

$$= \int xdt \cdot \overline{i} + \int ydt \cdot \overline{j} + \int zdt \cdot \overline{k}$$

Отсюда, ряд правил, известных для обыкновенного интеграла:

$$\int \overline{a} + \overline{b}dt = \int \overline{a}dt + \int \overline{b}dt,$$

$$\int C\overline{a}dt = C\int \overline{a}dt,\ C = const,$$

$$\int \overline{C}\alpha dt = \overline{C}\int \alpha dt,\ \overline{C} = const.$$

…

9. ***Скалярное и векторное произведения:***

Результат скалярного произведения – скаляр, численно равный

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}).$$

Результат векторного произведения – вектор, модуль которого равен

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$$

И который направлен перпендикулярно плоскости двух векторов векторного произведения, так, чтобы эти три вектора образовывали правую тройку векторов (поворот от первого ко второму с конца третьего вектора виден против часовой стрелки):

$$\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b},$$

$$\bar{c}\perp\bar{a}, \quad \bar{c}\perp\bar{b};$$

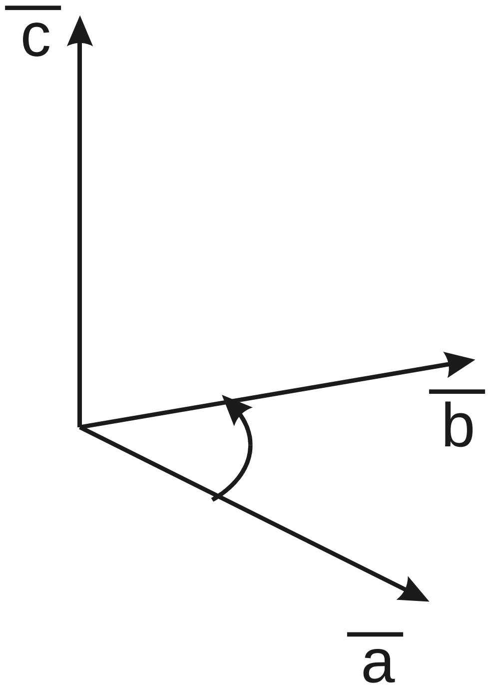


Рисунок 2.3
Правая тройка векторов

Так же существует выражение координат векторного произведения через определитель матрицы:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

⇐ *конец математических определений и теорем*…

Необходимо учесть, что из вышеперечисленного в вопросах по курсу может встретится вопрос об определении *скалярного* и *векторного произведений*.

2.2. Скалярная скорость

Скалярная скорость (υ) – производная пути по времени $\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$, «скорость по спидометру».

Можно доказать, что $\upsilon = \left|\overline{\mathrm{v}}\right|$.

Пояснение:

$$\left|\overline{\mathrm{v}}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta \overline{r}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta t}\right| = \frac{\left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta \overline{r}\right|}{\left|\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta t\right|} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\Delta \overline{r}\right|}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta t} = \frac{\left|d\overline{r}\right|}{dt}.$$

Однако важно отметить, что $\left|d\overline{r}\right| \neq d\left|\overline{r}\right|$.

Утверждение

$$\left|d\overline{r}\right| = dS$$

Рассмотрим произвольную криволинейную траекторию. Любую кривую на достаточно малом (*бесконечно малом…)* участке можно представить как дугу окружности. Точная модель данного представления будет дана чуть ниже.

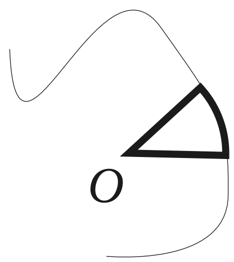
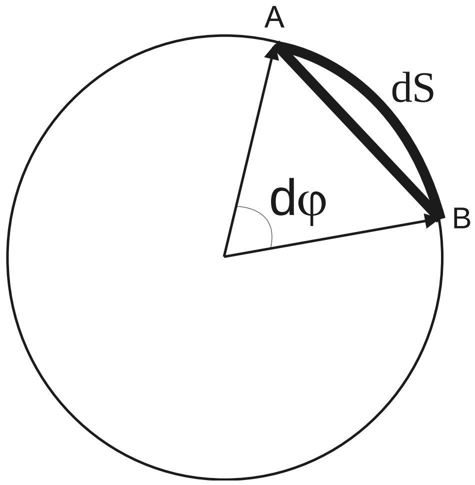


Рисунок 2.4
Приближение кривой дугой окружности

В геометрии существует теорема, что длина дуги стремится к длине стягивающей ее хорды при стремлении угла, на который они опираются, к нулю.



$$dS \to |AB| \quad при \quad d\varphi \to 0$$

Рисунок 2.5
Длина дуги и стягивающей её хорды

Главное, что следует понять здесь, что равенство

$$|\overline{\mathrm{v}}| = \frac{dS}{dt} \tag{2.3}$$

– утверждение, требующее доказательства, и не является чет-то само собой разумеющимся.

Приведём один из возможных вариантов доказательства. Сведём задачу к 1-му замечательному пределу.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Рассмотрим следующий чертёж – Рисунок 2.6.

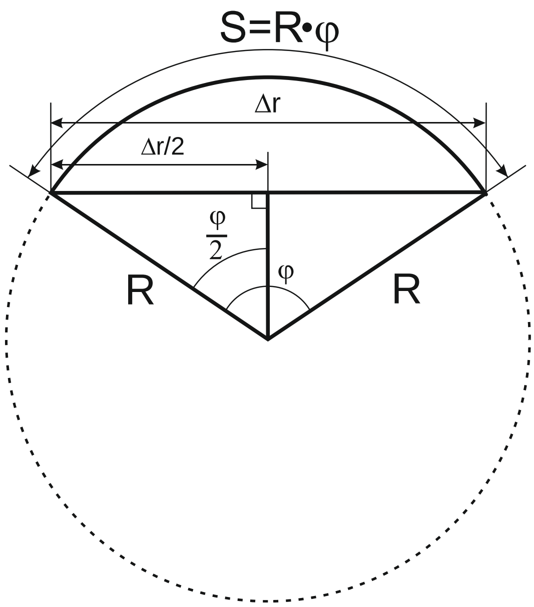


Рисунок 2.6
Доказательство утверждение о длине дуги и стягивающей хорды

Пусть Дуга длиной **S** стягивает хорду длиной **Δr**. При этом длину дуги можно представить, как произведение угла **φ** на радиус **R**:

$$S = R \cdot \varphi$$

Опустим перпендикуляр из центра окружности на хорду. Он разобьёт ходжу на две равные части длиной **Δr/2**. Из рассмотрения прямоугольного треугольника видно, что

$$\frac{\Delta r}{2} = R \sin\frac{\varphi}{2}$$

Но тогда

$$\Delta r = 2\frac{\Delta r}{2} = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$$

Теперь вспомним, что *элементарный путь* есть путь, пройденный за *бесконечно малый промежуток времени*. Учитывая, что любую отличную от прямой кривую на бесконечно малом промежутке можно приблизить дугой окружности (об этом мы ещё поговорим ниже), получим:

$$dS = \lim_{\Delta t \to 0} S = \lim_{\Delta t \to 0}\left(R \cdot \varphi\right),$$

С другой стороны, *длина элементарного перемещения* – длина хорды, стягивающей эту дугу. Тогда:

$$\left|d\,\bar{r}\right| = dr = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta r = \lim_{\Delta t \to 0}\left(2\frac{\Delta r}{2}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(2R\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Теперь рассмотрим отношение этих величин, не забывая о том, что отношение пределов равно пределу отношения функций:

$$\frac{\left|d\,\bar{r}\right|}{dS} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(2R\sin\frac{\varphi}{2}\right)}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(R \cdot \varphi\right)} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{2\cancel{R}\sin\frac{\varphi}{2}}{\cancel{R}\cdot\varphi} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}{\varphi\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = \left\{\begin{matrix} x = \frac{\varphi}{2} \\ \Delta t \to 0 \Rightarrow x \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\left|d\,\bar{r}\right|}{dS} = 1$$

Здесь мы свели это отношение к 1-ому замечательному пределу и получили в ответе значение *единица*.

То есть, можно утверждать, что эти величины (*элементарная длина пути* и *элементарное перемещение*) равны:

$$\frac{\left|d\,\bar{r}\right|}{dS} = 1 \Rightarrow \left|d\,\bar{r}\right| = dS$$

Но тогда

$$\left|\bar{\mathrm{v}}\right| = \frac{\left|d\,\bar{r}\right|}{dt} = \frac{dS}{dt} = \upsilon$$

2.3. Средняя скорость

Обычно, если контексте тех или иных рассуждений речь идёт о среднем значении величины, мы интуитивно понимаем под среднем значением среднее арифметическое значение этой величины:

$$\langle a \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{N}.$$

То есть, если мы десять раз измерили время падения груза, за наиболее вероятное значение мы примем сумму всех результатов, делённую на десять.

Но что, если величина меняется непрерывно? За день температура воздуха то возрастала, то уменьшалась. Каково среднее значение температуры за день? В этом случае за среднее значение принимается так называемое «среднеинтегральное» значение:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{x_2 - x_1} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{\Delta x}$$

Не трудно заметить, что для функции, изменяющейся дискретно, эта величина совпадёт со среднеарифметическим значением. Попробуйте проверить сами, если за день температура примерно 3 часа равнялась 15 °C, 3 часа 18 °C и 3 часа 21 °C – среднеинтегральное будет равняться 18 – среднеарифметическому от представленных чисел. С другой стороны, если температура равномерно изменялась от 15 до 21 °C, результат будет тот же – среднее значение равно 18 °C. Но здесь уже надо интегрировать.

Более точно:

По определению *определённого интеграла* (площадь криволинейной трапеции):

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x_i\right) \underset{\forall i:\Delta x_i = \Delta x}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x\right).$$

Тогда, подставляя в формулу для среднеинтегрального значения, получим:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{x_2 - x_1} \underset{\Delta X = x_2 - x_1}{=} \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{\Delta X} \underset{\Delta x = \frac{\Delta X}{N} \Rightarrow \Delta X = \Delta x \cdot N}{=} \frac{\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\Delta x\right)}{\Delta x \cdot N} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot N}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N}\right).$$

Последнее выражение есть предел среднеарифметического значения при количестве точек, стремящемся к бесконечности.

Для скалярной скорости, учитывая её определение, как производной пути по времени, имеем:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} \upsilon(t)\,dt}{t_2 - t_1} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dS}{\cancel{dt}}\,\cancel{dt}}{\Delta t} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} dS}{\Delta t} =$$

$$= \frac{S_2 - S_1}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Окончательно, ***средняя скорость***, по определению:

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Df: Средняя скорость равна всему пройденному пути, делённому на всё время.

Или, опуская символы «Δ», которые здесь не играют ни какого особого смысла («пусть» и «изменение пули», как и «время» и «изменение времени» – суть одно и тоже):

$$\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{S}{t}.$$

Мы получили привычное нам выражение «скорость есть путь делённый на время». Не следует забывать, что это выражение справедливо только для

1. абсолютного значения скорости или для так называемой «скалярной скорости» – физической величины, являющейся «сужением» понятия скорости на частный случай;
2. среднего значения этой величины за некоторый промежуток времени.

В любом случае, это выражение не является определением *физической величины* ***скорость***.

2.4. Уравнения движения

Df 1. ***Равномерное движение*** – движение, когда скорость остается постоянной по абсолютной величине.

$$\upsilon = const.$$

Df 2. ***Прямолинейное движение*** – когда скорость постоянна по направлению.

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}} = const.$$

<u>Df 3.</u> ***<u>Равномерное прямолинейное движение</u>*** – скорость постоянна по абсолютной величине и направлению.

$$\overline{\mathrm{v}} = const \Rightarrow \frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{a} = 0$$

<u>Df 4.</u> ***<u>Равноускоренное движение</u>*** – движение, когда ускорение постоянно по направлению и абсолютной величине: $\overline{a} = const$.

В этом случае, уравнение для скорости:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} \Rightarrow \overline{\mathrm{v}} = \int \overline{a} dt = \overline{a}t + \overline{c}_1 .$$

Напомним (неопределённый интеграл):

$$f(x) = \frac{d\mathrm{F}(x)}{dx} \Rightarrow \int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + C ,$$

где $\boldsymbol{C}$ – неизвестная константа, определяющая класс функций, производные от которых равны $f(x)$. В каждом конкретном случае константа может быть найдена исходя из начальных условий. В нашем случае это:

$$t = 0 \Rightarrow \overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}_0 \Rightarrow \overline{\mathrm{v}}_0 = \overline{a} \cdot 0 + \overline{c}_1$$

$$\overline{c}_1 = \overline{\mathrm{v}}_0$$

$$\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}_0 + \overline{a}t . \tag{2.4}$$

В представлении в виде проекций по координатам:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} + a_x t \\ \mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} + a_y t \\ \mathrm{v}_z = \mathrm{v}_{0z} + a_z t \end{cases} \tag{2.5}$$

Уравнение для радиус-вектора (уравнение движения):

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{d\overline{r}}{dt} \Rightarrow d\overline{r} = \int \overline{\mathrm{v}} dt$$

$$\overline{r} = \int \overline{\mathrm{v}} dt = \int (\overline{\mathrm{v}}_0 + \overline{a}t) dt = \overline{\mathrm{v}}_0 t + \frac{\overline{a}t^2}{2} + \overline{c}_2$$

$$t = 0 \Rightarrow \overline{r} = \overline{r}_0 \Rightarrow \overline{r}_0 = \overline{\mathrm{v}}_0 \cdot 0 + \frac{\overline{a} \cdot 0^2}{2} + \overline{c}_2$$

$$\overline{c}_2 = \overline{r}_0$$

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{\mathrm{v}}_0 t + \frac{\overline{a}t^2}{2} . \tag{2.6}$$

В координатном представлении:

$$\begin{cases} x = x_0 + \mathrm{v}_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + \mathrm{v}_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ z = z_0 + \mathrm{v}_{0z} t + \dfrac{a_z t^2}{2} \end{cases} \tag{2.7}$$

<u>Случай параметрического задания длины пути *S=S(t)*</u>
(например: машина едет по шоссе с постоянным ускорением, рассматриваем пройденный путь и скорость по спидометру… Повороты на дороге и центростремительное ускорение нас не интересуют)

$$a = const$$

$$(a \equiv |\bar{a}_\tau|, a \neq |\bar{a}|) \cdot$$

Тогда

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \cdot \tag{2.8}$$

Замечание. В данном случае *S* и *S₀* надо понимать не как длину параметризированной кривой – т.е. пройденный путь, а просто, как длину кривой. В случае, если тело, брошено вверх и проходит дважды по одной и той же траектории вперёд и назад (на подъёме и при спуске), *S* в результате будет равно *0*.

2.5. Нормальное и тангенциальное ускорение

Рассмотрим ускорение

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt}$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \upsilon \cdot \bar{\tau}$$

Здесь τ – орт касательной (орт – вектор единичной длины):

$$|\bar{\mathrm{v}}| = \upsilon \Rightarrow \bar{\mathrm{v}} = |\bar{\mathrm{v}}| \cdot \bar{\tau} = \upsilon\bar{\tau}$$

$$\text{так как}:$$

$$|\bar{\tau}| = 1,$$

$$\bar{\tau} \uparrow\uparrow \bar{\mathrm{v}} \Rightarrow \bar{\mathrm{v}} = |\bar{\mathrm{v}}| \cdot \bar{\tau}.$$

Рассчитаем ускорение, подставив в производную данное выражение для скорости:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d(\upsilon \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \upsilon \,.$$

Два слагаемых, на которые распалось ускорение:

$$\bar{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \bar{\tau} = \frac{d^2S}{dt^2} \cdot \bar{\tau}$$ *– тангенциальное ускорение,*

Абсолютное значение ускорения:

$$a_\tau = |\bar{a}_\tau| = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}\,.$$

$$\bar{a}_n = \frac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \upsilon$$ *– нормальное ускорение.*

Тангенциальное ускорение – отвечает за изменение скорости по абсолютной величине и направлению по касательной к траектории (параллельно скорости).

Нормальное ускорение – отвечает за изменение скорости по направлению и направлено перпендикулярно касательной к траектории к центру кривизны траектории.

Представление полного ускорения в виде суммы тангенциального и нормального ускорений – есть разложение его на две проекции в локальном базисе координат:

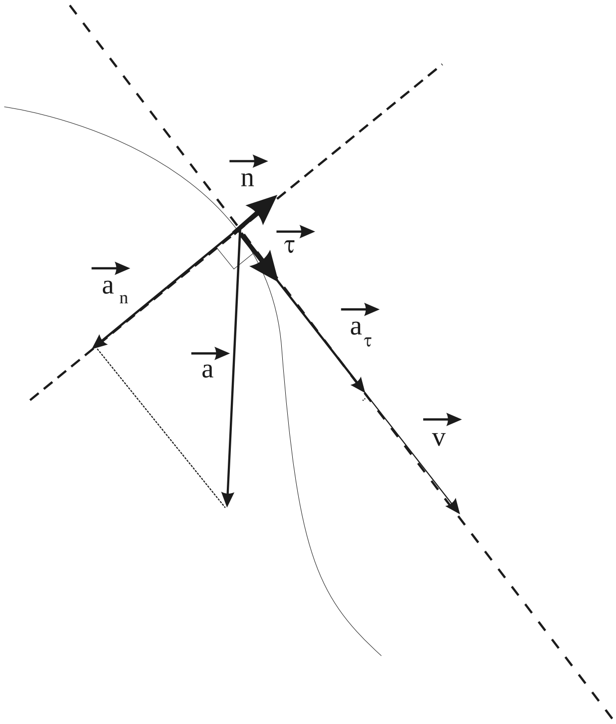


Рисунок 2.7
Тангенциальное, нормальное и полное ускорения

Выведем формулу для вычисления тангенциального ускорения.

Далее приведём два варианта вывода формулы нормального ускорения. Первый вариант попроще и покороче. *Вариант II* ближе к учебнику (учебник Савельева). В варианте учебника доказывается, что производная тангенциального ускорения по времени $\dfrac{d\bar{\tau}}{dt}$ равна угловой скорости вращения материальной точки ω $\left(\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}\right)$. Однако, проблема в том, что понятие угловой скорости к этому моменту нами ещё не введено. *Вариант I* попроще и обходится без этого.

Вариант I.

При выводе формулы нормального ускорения для простоты рассмотрим движение точки по окружности (Рисунок 2.8). В случае движения по кривой, в бесконечно малый промежуток времени эту кривую можно всегда приблизить той или иной окружностью. Будим искать выражение для производной орта касательной по времени $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$, поскольку именно через него вычисляется полное ускорение.

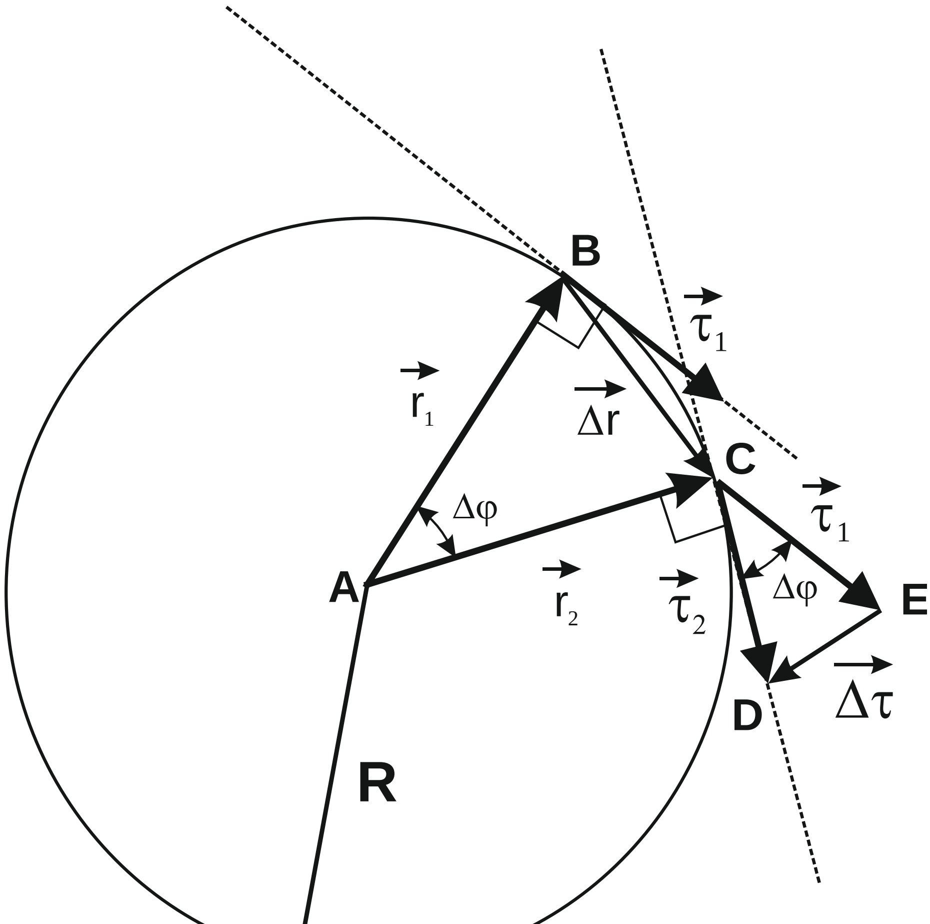


Рисунок 2.8

Поворот орта касательной при движении точки по окружности

Рассмотрим Рисунок 2.8.

1. Пусть за время Δt радиус-вектор $\vec{r}$ повернулся на угол $\Delta\varphi$ из положения $\vec{r}_1$ в положение $\vec{r}_2$.
2. Перенесём параллельно вектор $\vec{\tau}_1$ из точки **B** в точку **C**, чтобы посмотреть, как он поворачивается за время Δt.
3. Первое, что очевидно, что вектор $\Delta\vec{\tau}$ с уменьшением угла поворота (при уменьшении промежутка времени) всё ближе и ближе стремиться к перпендикуляру к вектору $\vec{\tau}$. А именно вектор $\Delta\vec{\tau}$ будет определять направление производной вектора $\vec{\tau}$ по времени. Отсюда можно сделать вывод, что
$$\vec{a}_n \parallel \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau}$$
$$\vec{a}_n \parallel \vec{n}$$
4. В Треугольниках **ABC** и **CED** все углы одинаковые:
   a. $\vec{\tau}_1 \perp \vec{r}_1, \vec{\tau}_2 \perp \vec{r}_2 \Rightarrow \angle BAC = \angle ECD = \Delta\varphi$.
   b. Треугольники **ABC** и **CED** равнобедренные. Следовательно, углы при основании в обоих треугольниках равны между собой и равны $\phi = \dfrac{\pi - \Delta\varphi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\Delta\varphi}{2}$.
5. Отсюда следует, что эти треугольники подобны. Но мы решим задачу, не пользуясь подобием треугольников.
6. По теореме синусов имеем:
   a. для треугольника **ABC**
$$\frac{|BC|}{\sin\angle BAC} = \frac{|AC|}{\sin\angle ABC} \Rightarrow \frac{\Delta r}{\sin\Delta\varphi} = \frac{r}{\sin\phi}$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\phi}$$
   b. для треугольника **CED**
$$\frac{|ED|}{\sin\angle ECD} = \frac{|CE|}{\sin\angle CDE} \Rightarrow \frac{\Delta\tau}{\sin\Delta\varphi} = \frac{\tau}{\sin\phi}$$
$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\phi}$$

7. Приравняем левые части полученных выражений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\phi}\\ \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\phi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

В принципе, этот вывод можно было сделать из условия подобия треугольников **ABC** и **CED**.

8. Поскольку орт касательной – это единичный веткор, его длина равна единице:

$$\left|\vec{\tau}\right| = 1 \Rightarrow \tau = 1 \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \Delta\tau$$

9. Разделим правую и левую части на **Δ***t*:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta r}{r}\Bigg| \div \Delta t$$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{r\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

10. Вспомним, что

$$\Delta\tau = \left|\Delta\vec{\tau}\right|$$

$$\Delta r = \left|\Delta\vec{r}\right|$$

и перейдём к обозначению векторов, как векторов.

$$\frac{\left|\Delta\vec{\tau}\right|}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}$$

11. А теперь перейдём от конечного промежутка времени к бесконечно малому, перейдём к пределу и к производной

$$\Delta \to d$$

$$\frac{\left|d\vec{\tau}\right|}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\left|d\vec{r}\right|}{dt}$$

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

12. Заметим, что справа под модулем у нас стоит выражение для скорости (по определению) и то, что модуль вектора скорости есть скалярная скорость, определение которой мы уже вводили

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{1}{r}\left|\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{\mathrm{v}}}\right| = \frac{|\vec{\mathrm{v}}|}{r} = \frac{v}{r}$$

13. Ещё обратим внимание на то, что модуль радиус-вектора в нашем случае ни что иное, как радиус окружности, по которой движется наша материальная точка

$$r \equiv R \Rightarrow \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{v}{r} = \frac{v}{R}$$

14. Дальше подставим полученное выражение для абсолютного значения производной орта касательной по времени в выражение для нормального ускорения

$$a_n = v\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = v\frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}$$

15. Получим искомую формулу

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Учитывая сделанные выводы о направлении вектора нормального ускорения и тот факт, что нормаль всегда будет направлена (*так обычно принято*) от центра окружности, от центра кривизны, а нормальное ускорение будет «поворачивать» скорость как раз к центру окружности, то есть в противоположную сторону, окончательно получим:

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{R}(-\bar{n})$$

Вариант II (вывод, близко к учебнику Савельева).

Случай движения по окружности. Вычислим $\dfrac{d\overline{\tau}}{dt}$:

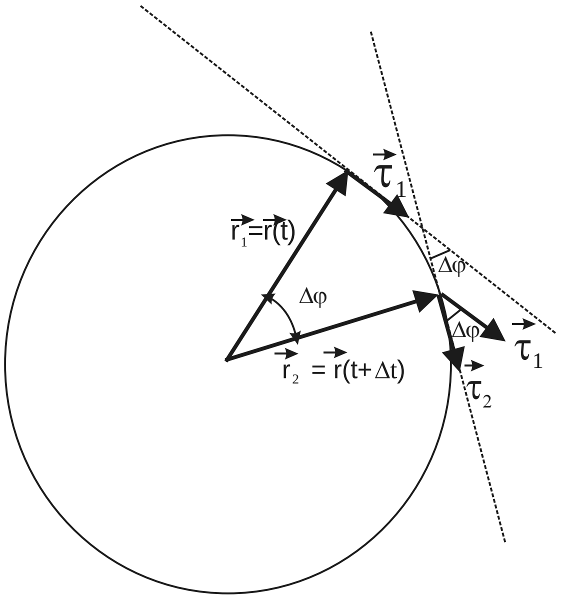


Рисунок 2.9
Угол поворота орта касательной

На Рисунок 2.9 $\Delta\varphi$ – угол, на который повернулся радиус-вектор $\overline{r}$ за время Δt

$$\overline{\tau}_1 \perp \overline{r}_1$$

$$\overline{\tau}_2 \perp \overline{r}_2$$

$$\widehat{\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2} = \widehat{\overline{r}_1, \overline{r}_2} = \Delta\varphi$$

Отсюда видно, что угол поворота касательного вектора $\overline{\tau}$ будет и, одновременно, углом поворота радиус-вектора.

Теперь вычислим производную единичного касательного вектора по времени (зная, что угол его поворота совпадает с углом поворота радиус-вектора):

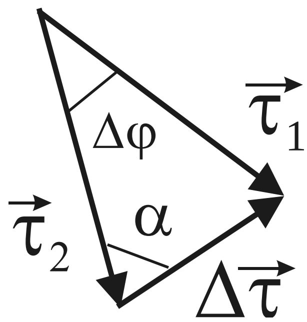


Рисунок 2.10
Приращение орта касательной

Пусть:

$$\tau = \left|\overline{\tau}_1\right| = \left|\overline{\tau}_2\right| = 1,$$

$$\Delta\tau = \left|\Delta\overline{\tau}\right| = \left|\overline{\tau}_2 - \overline{\tau}_1\right|$$

По теореме синусов:

$$\frac{\Delta\tau}{\sin\Delta\varphi} = \frac{\tau}{\sin\alpha}$$

Тогда

$$\left|\frac{d\tau}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tau\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin\alpha}}{\Delta t}.$$

Когда промежуток времени стремиться к нулю, выполняются следующие предельные переходы:

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi \to 0,$$

$$\sin\Delta\varphi \to \Delta\varphi,$$

$$\alpha \to \pi/2,$$

$$\sin\alpha \to 1.$$

Учтём, также, что τ=1. Тогда

$$\left|\frac{d\overline{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tau\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin\alpha}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1\cdot\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\sin \pi/2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi/1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Для окружности $S = R\Delta\varphi$ (Рисунок 2.11):

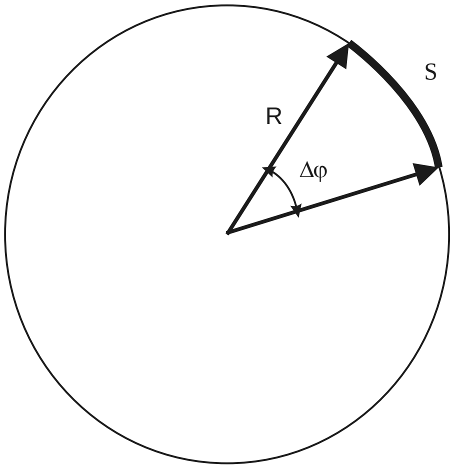


Рисунок 2.11
Длина дуги и угол поворота

Тогда $\Delta\varphi = S/R$

Вариант:

$$d\tau = dS_{\tau} = \left|\bar{\tau}\right| \cdot d\varphi = 1 \cdot d\varphi = d\varphi$$

1 .

Здесь: dS_{τ} – длина дуги, описываемая концом вектора $\bar{\tau}$, в пределе стремиться к длине стягивающей её хорды $d\tau$ (см. выше).

Далее имеем:

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{R\Delta t} = \frac{1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{\upsilon}{R}$$

Подставляя в исходное выражение для нормального ускорения, получаем:

$$a_n = \left|\bar{a}_n\right| = \upsilon \cdot \left|\frac{d\tau}{dt}\right| = \upsilon\,\frac{\upsilon}{R} = \frac{\upsilon^2}{R}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

По модулю $a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$, по направлению $\bar{a}_n \uparrow\downarrow \bar{n}$, $\bar{n} \perp \bar{\tau}$ Орт касательной направлен «наружу», от центра окружности, а касательное ускорение всегда смотрит внутрь, к центру.

Окончательно имеем:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \tag{2.9}$$

$$\bar{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\bar{\tau} \tag{2.10}$$

$$\bar{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}(-\bar{n}) \tag{2.11}$$

$$\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n$$

Общий случай: в общем случае криволинейного движения под радиусом ***R*** в формуле нормального ускорения понимается радиус кривизны траектории.

Радиус кривизны: если рассмотреть бесконечно малый участок кривой, его приблизительно можно представить как дугу некой окружности. Чем меньше участок кривой, тем ближе эта кривая будет приближаться к окружности. Радиус этой окружности – радиус кривизны.

Более точно: Для длины дуги ***S*** окружности с радиусом ***R*** и угла ***Δφ***

$$S = R\Delta\varphi$$

При стремлении угла к нулю

$$\Delta S \to 0 \Rightarrow \Delta\varphi \to 0$$

В пределе имеем

$$dS = Rd\varphi \Rightarrow R = \frac{dS}{d\varphi}$$

Возвращаясь к Рисунок 2.10, и вспоминая, что угол поворота радиус вектора равен углу поворота касательной, под $d\varphi$ можем понимать угол, на который поворачивается орт касательной $\bar{\tau}$ в процессе движения материальной точки.

Таким образом:

<u>Df.</u> Радиус кривизны – производная пути по углу поворота орта касательной $\bar{\tau}$

$$R = \frac{dS}{d\varphi}$$

Величина обратная радиусу кривизны называется ***кривизной траектории***.

$$C = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dS} \tag{2.12}$$

Ещё раз запишем основные выводы:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n(-\bar{n}), \tag{2.13}$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}, \tag{2.14}$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}, \tag{2.15}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \cdot \tag{2.16}$$

$$\bar{a}_n \perp a_\tau \text{ т.к. } \bar{\tau} \perp \bar{n}.$$

Мы имеем разложение ускорения в локальном базисе, где тангенциальное ускорение есть проекция полного ускорения на касательную, а нормальное ускорение – полное ускорение на нормаль.

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \tag{2.17}$$

$$a_\tau = a \cdot \cos\varphi, \tag{2.18}$$

$$a_n = a \cdot \sin\varphi, \tag{2.19}$$

где $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{\mathrm{v}})$.

Замечание. Ещё раз обратим внимание, что при решении наших задач мы скорее будим определять радиус кривизны траектории, зная нормальное ускорение, а не наоборот. Точное математическое определение кривизны приведено в данном тексте лишь для справки.

Ниже мы приведём пример задачи на определение радиуса кривизны траекторию. Рассмотрим тело, брошенное под углом α к горизонту. Определим кривизну его траектории в некоторый момент $\boldsymbol{t}$.

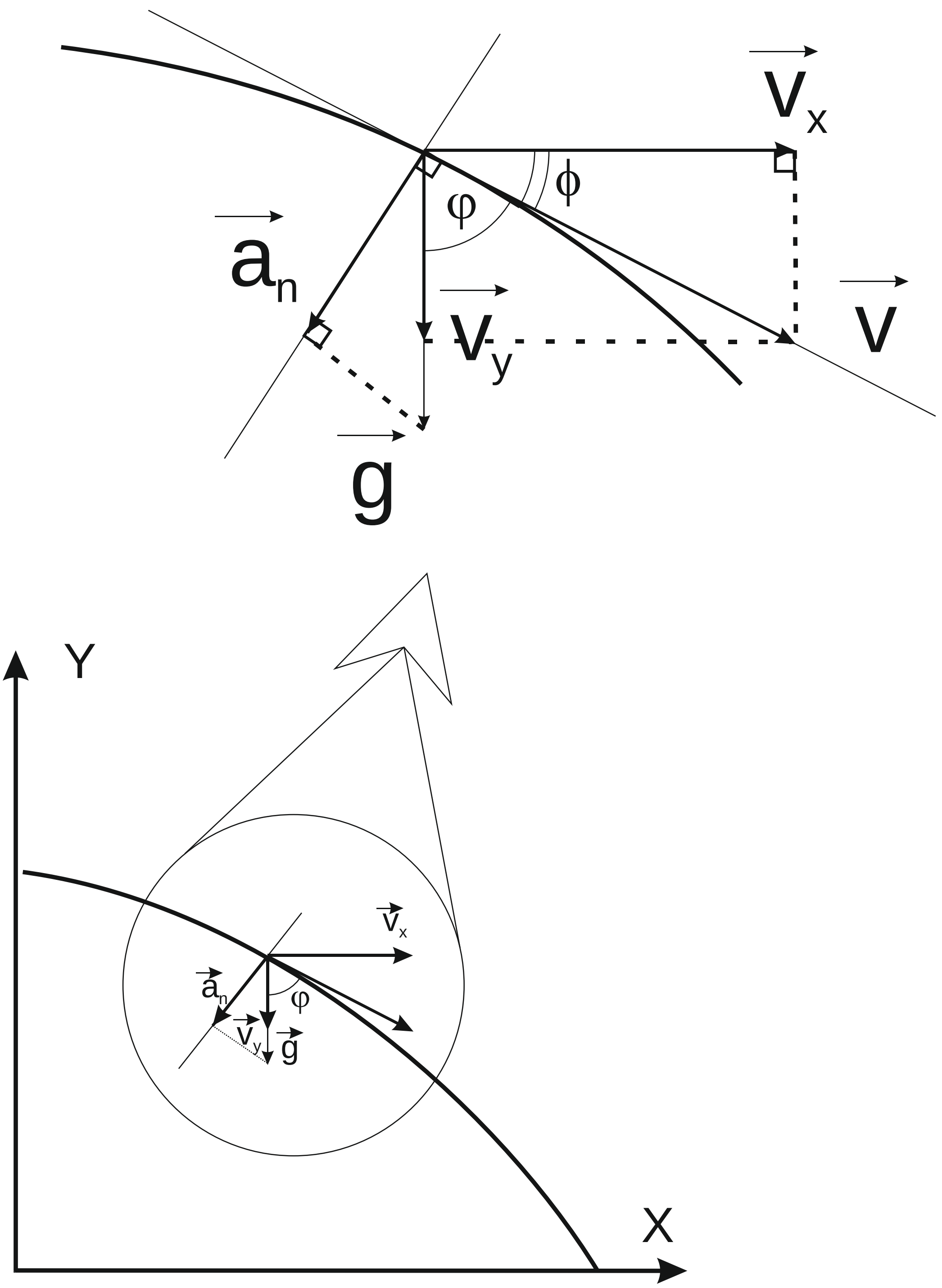


Рисунок 2.12
Вычисление нормального ускорения в задачах

Нормальное ускорение можно определить, как проекцию полного ускорения – ускорения свободного падения на нормаль:

$$a_n = g \cdot \sin\varphi \, .$$

При этом для угла $\boldsymbol{\varphi}$ имеем:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \phi \Rightarrow \sin\varphi = \cos\phi \, .$$

Тогда:

$$a_n = g \cdot \sin\varphi = g \cdot \cos\phi \,.$$

С другой стороны, угол $\boldsymbol{\phi}$ можно найти, как отношение проекции скорости на ось $\boldsymbol{X}$ к абсолютному значению самой скорости:

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v} \cdot \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} \,.$$

Тогда получим:

$$a_n = g \cdot \cos\phi = g\,\frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} \,.$$

В итоге, используя формулу для вычисления нормального ускорения, получаем значение кривизны траектории:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\mathrm{v}^2}{a_n} = \frac{\mathrm{v}^2}{a_n} = \frac{\mathrm{v}^2}{g\mathrm{v}_x/\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v}^3}{g\mathrm{v}_x} = \frac{\left(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2\right)^{3/2}}{g\mathrm{v}_x} \,.$$

Значение для проекций скорости можем вычислить, используя соответствующие уравнения для равноускоренного движения:

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_0 \cos\alpha$$

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_0 \sin\alpha - gt$$

2.6. Преобразование координат

<u>*Аффинное преобразование.*</u>

Пусть система отсчёта связана с телом ***(1)***. Перейдём к новой системе отсчёта и выберем за тело отсчёта тело ***(2)***. Данное действие эквивалентно переносу начала отсчёта системы координат из точки ***O*** в точку ***O`***. Такой перенос начала отсчёта системы координат в математики называется *аффинным преобразованием*.

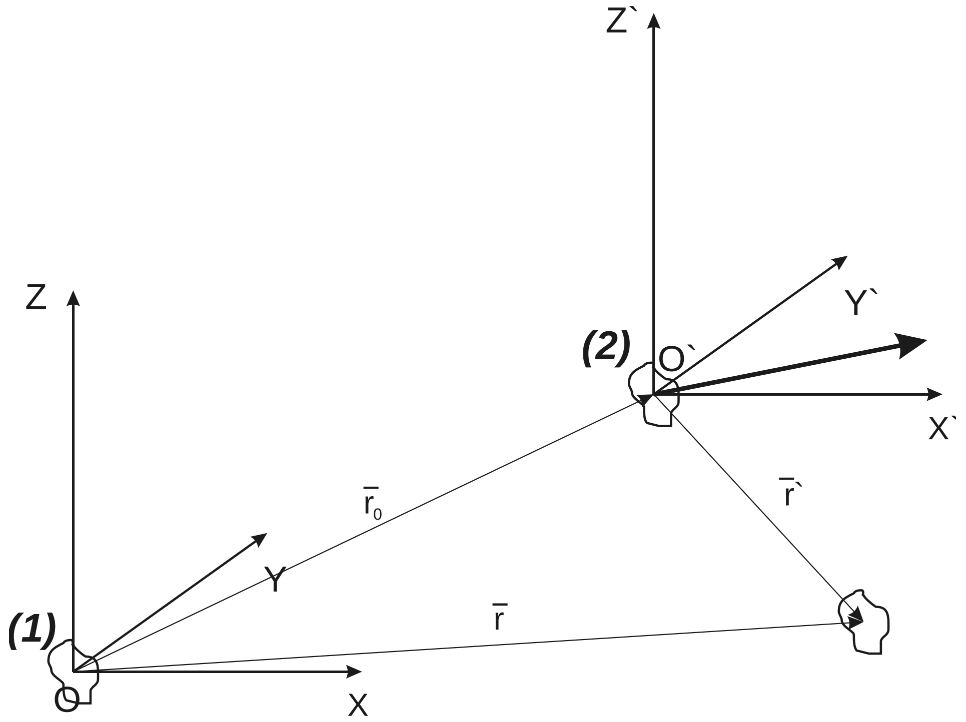


Рисунок 2.13
Аффинное преобразование

При этом:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{r'} \tag{2.20}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{r'} = \overline{r} - \overline{r_0}$$

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

$$z' = z - z_0$$

<u>*Правило сложения скоростей.*</u>

Отдельно необходимо отметить, как будет изменяться скорость при переходе от одной системы отсчёта к другой. К этому вопросу мы ещё вернёмся при рассмотрении ***преобразования Галилея***. Рассмотрим формулу преобразования координат и продифференцируем её по времени:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{r'},$$

$$\underbrace{\frac{\overline{dr}}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}}} = \underbrace{\frac{d\overline{r_0}}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}_0}} + \underbrace{\frac{d\overline{r'}}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}'}},$$

$$\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}}_0 + \overline{\mathrm{v}}'. \tag{2.21}$$

Получили классическое (*нерелятивистское*) правило сложения скоростей. *Поясним ещё раз*.

Пусть тело движется относительно исходной системы отсчёта (которую будем считать неподвижной) со скоростью $\overline{\mathrm{v}}$. Перейдём к новой системе отсчёта, движущейся относительно исходной со скоростью $\overline{\mathrm{v}}_0$. Тогда скорость $\overline{\mathrm{v}}'$ в новой системе координат будет связана со скоростью в старой системе координат соотношением:

$$\overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}'+\overline{\mathrm{v}}_0$$

Скорость в неподвижной (системы, координат, относительно которой мы рассматриваем движение, до переноса начала отсчёта в другую точку, её, на данном этапе, мы можем считать неподвижной) системе координат равна скорости в подвижной системе координат плюс скорость подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат.

Замечание. Отдельно отметим, что отсюда следует, что скорости тел в системе отсчёта не зависят от конкретного выбора начала отсчёта, как какой-либо из точек (*какой-либо материальной точки*) тела отсчёта. Скорости всех точек тела отсчёта относительно системы отсчёта, связанной с данным телом, будут равны нулю, так как взаимное расположение всех точек абсолютно твёрдого тела неизменно (см. *Df*). Следовательно:

$$\overline{r}_0=\mathrm{const}\Rightarrow_0 \underbrace{\frac{d\overline{r}}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}}}=\underbrace{\frac{d\overline{r}_0}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}}_0=0}+\underbrace{\frac{d\overline{r}'}{dt}}_{\overline{\mathrm{v}}'}\Rightarrow\overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}'.$$

Преобразование Галилея.

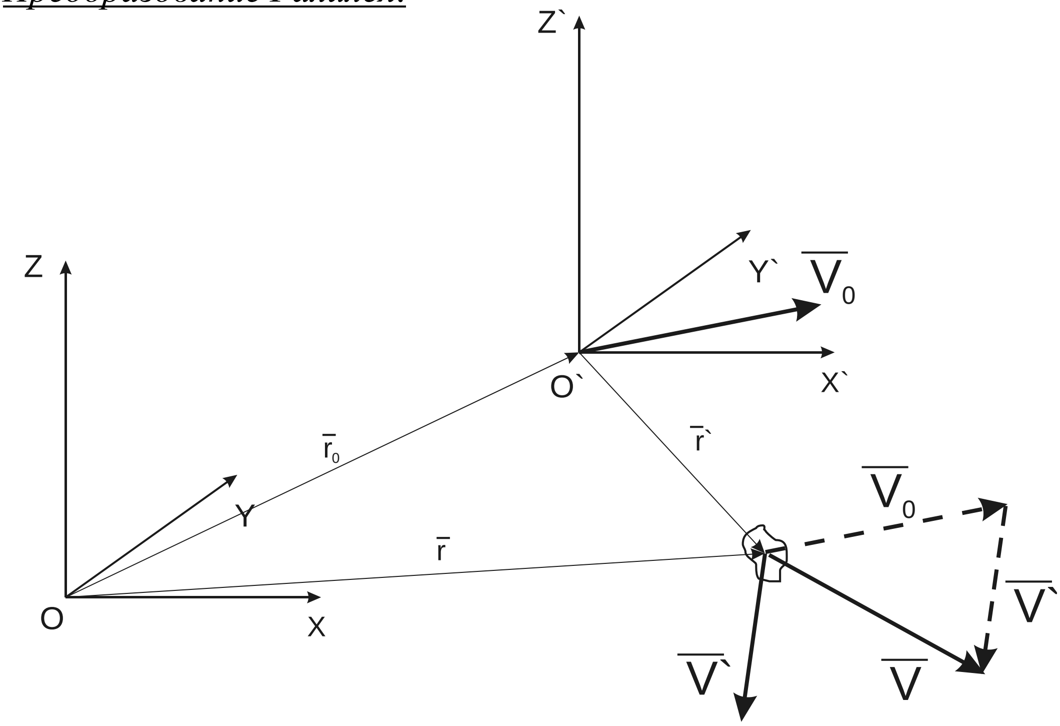


Рисунок 2.14
Преобразование Галилея

Рассмотрим ещё одно представление для данных двух утверждений. Пусть штрихованная система движется относительно неподвижной, не штрихованной системы отсчёта равномерно и прямолинейно. Координаты точки, неподвижной в движущейся (*штрихованной*) системе координат, связанны для двух систем отсчёта соотношением:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{r'}.$$

Скорость подвижной системы координат определяет её положение относительно неподвижной:

$$\overline{\mathrm{v}}_0 = \frac{d\overline{r_0}}{dt} \Rightarrow d\overline{r_0} = \overline{\mathrm{v}}_0 dt,$$

$$\int d\overline{r_0} = \int \overline{\mathrm{v}}_0 dt.$$

Таким образом, имеем выражение радиус-вектор $\overline{r_0}$ через время и скорость движения подвижной системы отсчёта (считаем, что в начальный момент времени положение начала координат обеих систем отсчёта совпадали):

$$\overline{r_0} = \overline{\mathrm{v}}_0 t.$$

Подставим полученное в предыдущее выражение:

$$\overline{r} = \overline{\mathrm{v}_0 t} + \overline{r'},$$

и, для единообразия, поменяем местами слагаемые.

$$\bar{r} = \bar{r}' + \overline{\mathrm{v}_0} t$$

При этом, проводя преобразование, время и в той и в другой системах координат мы считали одинаковым.

$$t' = t$$

Для подвижной системы координат учтём этот факт. Будим в ней рассматривать её собственное время, равное по величине вмени неподвижной системы координат:

$$\bar{r} = \bar{r}' + \overline{\mathrm{v}_0} t' \, .$$

Полученную связь между координатами и временем в неподвижной и движущейся системах отсчёта, принятую в классической механике (*механике Ньютона-Галилея*), называют ***преобразованиями Галилея:***

$$\begin{cases} x = x' + \mathrm{v}_{0x} t' \\ y = y' + \mathrm{v}_{0y} t' \\ z = z' + \mathrm{v}_{0z} t' \\ t = t' \end{cases} \qquad (2.22)$$

(Преобразование координат из системы покоящейся к системе движущийся относительно первой равномерно и прямолинейно)

2.7. Поступательное движение тела

Поступательное движение:

<u>Df 1.</u> Поступательное движение – это движение, когда каждая связанная с телом прямая переходит в параллельную ей прямую.

<u>Df 2.</u> Поступательное движение – это такое движение, когда все материальные точки тела движутся по параллельным траекториям.

***<u>Df 3.</u> Поступательное движение* – это такое движение, когда все материальные точки тела за равные промежутки времени, совершают равные перемещения.**

***Замечание 1*:** Третье определение является наиболее точным. Первое определение напрямую следует из него, а второе страдает математической некорректностью (*что такое параллельные кривые???*), однако является наиболее наглядным.

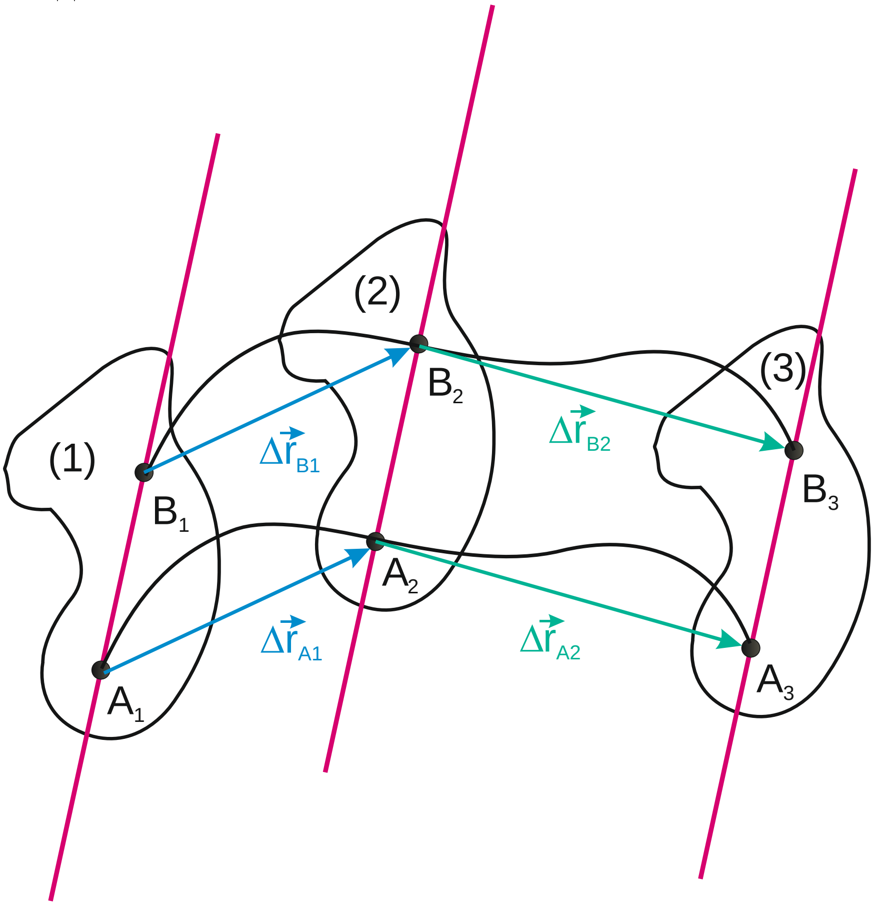


Рисунок 2.15

Три определения поступательного движения в сравнении

***Замечание 2*:** Отметим, поскольку за равные промежутки времени точки совершают равные перемещения, все точки тела при поступательном движении бут иметь равные скорости:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\mathrm{v}} := \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}\\ &\Delta \bar{r}_A = \Delta \bar{r}_B\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{\mathrm{v}}_A = \bar{\mathrm{v}}_B.$$

2.8. Вращательное движение материальной точки и тела

Вращательное движение материальной точки – движение точки по окружности. Ось перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через ее центр – ***ось вращения.***

Вращательное движение твердого тела – движение, когда все точки тела движутся по окружностям с центрами, лежащими на одной оси (эта ось называется *оси вращения*).

При рассмотрении вращательного движения удобно перейти от декартовой к цилиндрической системе координат, при этом положение материальной точки задается высотой, расстоянием до вертикальной оси (радиусом) и углом поворота. При вращательном движении реальный интерес представляют радиус и угол поворота, а реально изменяется в ходе движения только угол поворота.

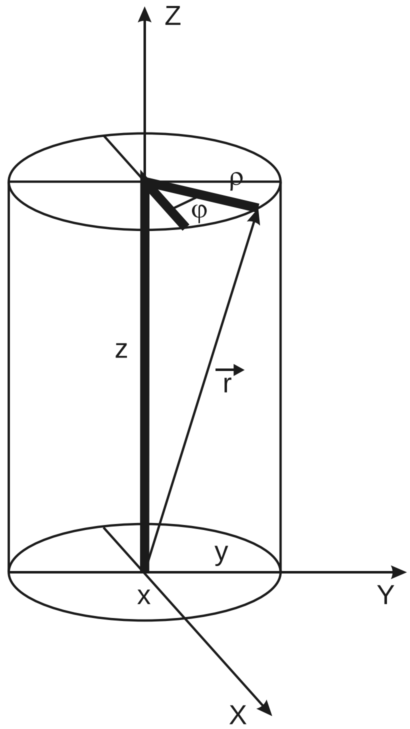


Рисунок 2.16
Вращательное движение твёрдого тела
Декартова система (x, y, z)
Цилиндрическая (φ, R, z)

Замечание: угол поворота φ – не вектор! Однако элементарный угол поворота $\overline{d\varphi}$ будет являться вектором. Т.о. аксиальным вектором будет являться и производная φ :

$$\overline{\varphi'} = \frac{\overline{d\varphi}}{dt}.$$

Аксиальный или псевдовектор – вектор, известный с точностью до направления. Псевдовектором является, в частности, результат векторного произведения.

Df 1. ***Угловой скоростью*** называется векторная величина (*аксиальный* ≡ *псевдовектор*) равная производной угла поворота по времени. Вектор направлен по оси вращения, т.о. чтобы с конца вектора угловой скорости поворот был виден против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении:

$$\omega = |\overline{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \tag{2.23}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{d\varphi}}{dt} \tag{2.24}$$

Измеряется в *секундах в минус первой степени,* $\left[c^{-1}\right] = \frac{1}{[c]}$.

Замечание 1. Угол поворота не является вектором, однако элементарное приращение угла поворота может быть задано вектором, направленным по оси вращения. Т.о. угловая скорость является вектором, направленным по оси вращения.

Угловое ускорение.

Df 2. Первую производную угловой скорости по времени, или вторую производную угла по времени, называют ***угловым ускорением:***

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\overline{d\omega}}{dt} = \frac{\overline{d^2\varphi}}{dt^2}, \tag{2.25}$$

$$\varepsilon = |\overline{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{2.26}$$

Измеряется в *секундах в минус второй степени,* $\left[c^{-2}\right] = \frac{1}{[c]^2}$.

Замечание 2. Таким образом, при вращательном движении твёрдого тела угловые кинематические характеристики будут одинаковы для всех точек тела. При этом линейные («обыкновенная» скорость и ускорение) будут, как мы покажем ниже, зависеть от расстояния до оси вращения.

Замечание 3. Угловая скорость и угловое ускорение – *аксиальные* или *псевдовекторы*. Они определены с точностью до направления. Примером аксиального вектора является результата векторного произведения. Если обыкновенный вектор имеет своё направление, независимо от того, ввели мы систему координат или нет, то направление псевдовектора задаётся «руками». Ни один физический закон в качестве конечной величины, которая может быть измерена, не содержит псевдовектор. Эти величины используются как промежуточные конструкции. За счёт присутствия в законе такого «волюнтаризма» два раза произвол в выборе направления исчезает.

Замечание 4. Вообще говоря, здесь возможны два взгляда на действительность: либо мы говорим о вращении тела относительно одной жёстко закреплённой оси (вращение колеса) и тогда мы логично переходим от декартовой к цилиндрической системе координат. Либо мы говорим о свободном вращении тела в пространстве, вращении его относительно неизвестной нам оси и т.д. Тогда мы действительно будем говорить о векторах, причём в той же смой системе отсчёта, определяемой телом отсчёта и часами. И здесь также, как и для обыкновенных скоростей и ускорений, нам будет не принципиален выбор той или иной системы координат – мы действительно будем иметь дело с векторами. Правда, дойдя до динамики, в этом случаи нам очень скоро придётся перейти не к обыкновенным, а к матричным уравнениям ☹. Но об этом позже….

Связь между линейной и угловой скоростями:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$S = R \cdot \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{S}{R},$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(\frac{S}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dS}{dt} = \frac{v}{R},$$

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v = \omega R. \tag{2.27}$$

Можно также показать, что справедливо векторное соотношение:

$$\bar{\mathrm{v}} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \tag{2.28}$$

где $\bar{r}$ – радиус вектор, проведенный из центра на оси:

$$|\bar{\mathrm{v}}| = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega R$$

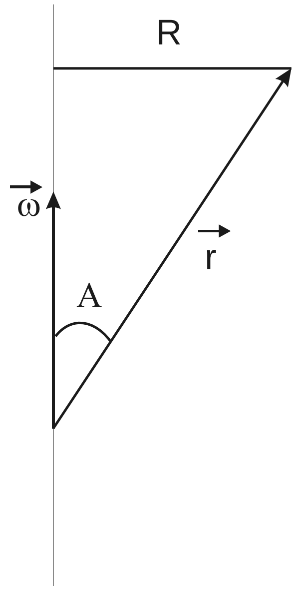


Рисунок 2.17
Радиус-вектор и радиус вращения

Для тангенциального и нормального ускорения имеем:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d(R\cdot\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

В итоге:

$$a_\tau = \varepsilon R; \qquad (2.29)$$

$$a_n = \omega^2 R \qquad (2.30)$$

Df. ***Равноускоренное вращательное движение*** – движение, когда угловое ускорение постоянно. $\varepsilon = const$

Уравнение равноускоренного вращательного движения (получается аналогично уравнениям движения материальной точки интегрированием исходного выражения $\varepsilon = const$)

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (2.31)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (2.32)$$

2.9. Общий случай движения тела. Плоское движение

Из всех возможных случаев произвольного движения тела стоит выделить случай плоского движения.

Df. ***Плоское движение*** – движение, когда траектория всех точек тела есть кривые, лежащие в параллельных плоскостях.

В дальнейшем будем рассматривать плоское движение, если не оговорено иначе.

Утверждение: Любое плоское движение может быть представлено как совокупность поступательного и вращательного движения.

Рассмотрим перемещение тела из положения (1) в положение (2). Выберем одну произвольную точку (точку ***A***), принадлежащую данному телу и переметим тало сначала из положения (1) в положение (1`) поступательно до совмещения точки ***A*** со своим новым положением. После этого повернём тело вокруг точки ***A*** до совмещения со своим новым положением. Если рассматривать элементарные перемещения, то подобное представление плоского движения будит точным.

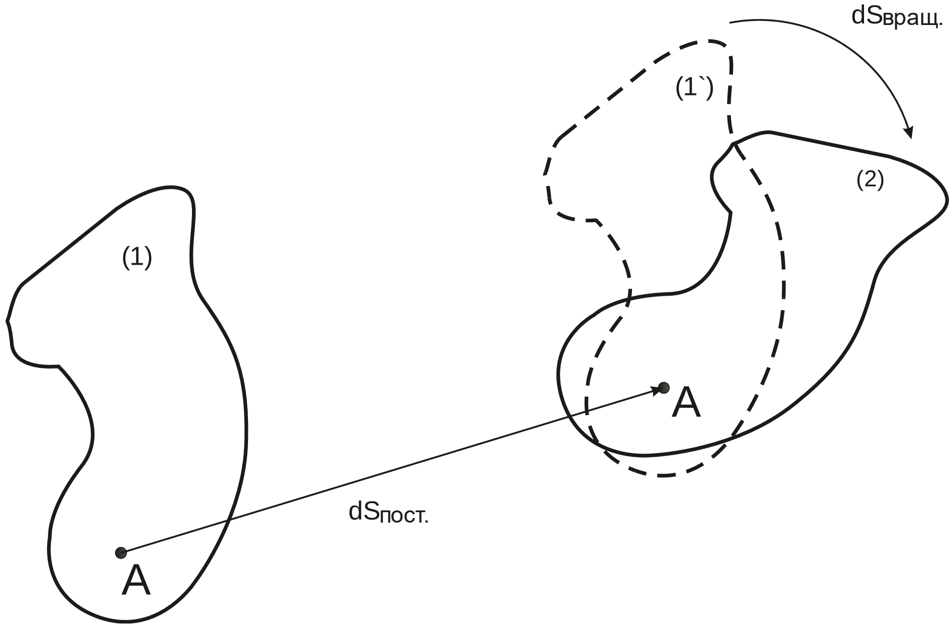


Рисунок 2.18
Плоское движение твёрдого тела

$$dS = dS_{поступ.} + dS_{вращ.} \,,$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dS_{поступ.}}{dt} + \frac{dS_{вращ.}}{dt} = v_{поступ} + v_{вращ} = v_{поступ} + \omega R \,.$$

Здесь мы учли, что для вращательного движения $v_{вращ} = \omega R$, где ω – угловая скорость.

В векторном виде выражение будет выглядеть, как

$$\overline{v} = \overline{v}_{пост} + \overline{\omega} \times \overline{r}$$

Замечание: угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора центра, относительно которого рассматривается вращение (оси вращения).

Доказательство:

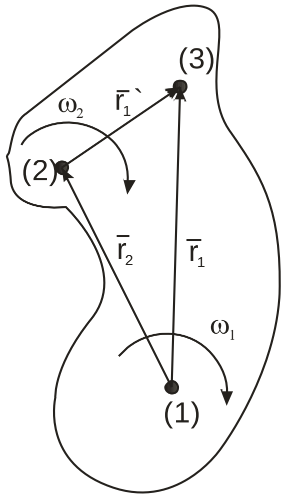


Рисунок 2.19

Теорема о равенстве угловых скоростей

Рассмотрим движение точки (3), сначала как вращение относительно точки (1) и поступательное движение вместе с ней, а затем перейдём к рассмотрению вращения этой же точки относительно точки (2) и поступательного движения с её скоростью. (Суммарная скорость вращательного и поступательного движения тела при этом остаётся постоянной – это скорость $\overline{v}$ относительно внешней, покоящейся системы отсчёта).

Скорость движения тела, когда вращение рассматривается относительно точки (1):

$$\overline{v}=\overline{v}_1+\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1\,. \tag{2.33}$$

Скорость движения, когда вращение рассматривается относительно точки (2):

$$\overline{v}=\overline{v}_2+\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'\,.$$

Скорость движения точки (2) относительно точки О.

$$\overline{v}_2=\overline{v}_1+\overline{\omega}_1\times\overline{r}_2\,.$$

По правилу сложения скоростей имеем:

$$\overline{v}=\overline{v}_2+\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'=\overline{v}_1+\overline{\omega}_1\times\overline{r}_2+\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'\,. \tag{2.34}$$

Приравнивая скорости в представлении (2.33) и (2.34) поучаем:

$$\overline{v}_1+\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1=\overline{v}_1+\overline{\omega}_1\times\overline{r}_2+\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'$$

$$\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1=\overline{\omega}_1\times\overline{r}_2+\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'$$

$$\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1-\overline{\omega}_1\times\overline{r}_2=\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'$$

$$\overline{\omega}_1\times(\overline{r}_1-\overline{r}_2)=\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'$$

$$\overline{r}_1-\overline{r}_2=\overline{r}_1'$$

$$\overline{\omega}_1\times\overline{r}_1'=\overline{\omega}_2\times\overline{r}_1'$$

$$\overline{\omega}_1=\overline{\omega}_2=\overline{\omega}$$

Способ представления плоского движения как суммы поступательного и вращательного движения всегда неоднозначен (за исключением чисто поступательного движения). Это видно, хотя бы, из того, что изменение точки, взятой за центр вращения, однозначно приведёт к изменению радиус-вектора, а, следовательно, и второго слагаемого в выражении $\overline{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{v}}_{\text{пост}}+\overline{\omega}\times\overline{r}$.

Вывод: такого представления не однозначен. Выбирая различные центры (оси), мы можем менять величину поступательной и вращательной составляющей скорости. Если движение не является строго поступательным, всегда можно найти такую точку (*ось*) вращения, что величина скорости поступательного движения будет равна нулю. Эта точка – мгновенный центр скоростей, а ось – мгновенная ось вращения.

К примеру, рассмотрим следующий алгоритм рассуждений:

$$\overline{\mathrm{v}}_1+\overline{\omega}\times\overline{r}_1=\overline{\omega}\times\overline{r}_{мцс}$$

$$\overline{\omega}\perp Пл.\left(\overline{r}_1,\overline{r}_{мцс}\right)\Rightarrow Sin(\alpha)=1$$

$$\left(\left|\overline{\omega}\times\overline{r}\right|=\overline{\omega}\cdot\overline{r}\cdot Sin(\alpha)\right)$$

$$\left|\overline{r}_{мцс}\right|=\left|\frac{1}{\omega}\left(\overline{\omega}\times\overline{r}_{мцс}\right)\right|=\left|\frac{1}{\omega}\left(\overline{\mathrm{v}}_1+\overline{\omega}\times\overline{r}_1\right)\right|,$$

$$\overline{r}_{мцс}\perp\overline{\omega}.$$

Из данных рассуждений можно сделать, по крайней мере, один вывод. Если угловая скорость ω относительно какой-либо точки не равна нулю, то такая точка однозначно определена.

Df. При плоском движении точка, относительно которой, в данный момент времени движение может быть представлено как чисто вращательное, называется мгновенным центром скоростей.

Пример мгновенного центра скоростей. Колесо катится без проскальзывания по поверхности. Точка соприкосновения колеса с поверхностью имеет мгновенную скорость ноль (*скорости в точке соприкосновения равны, а поверхность покоится…*). Эта точка – мгновенный центр скоростей:

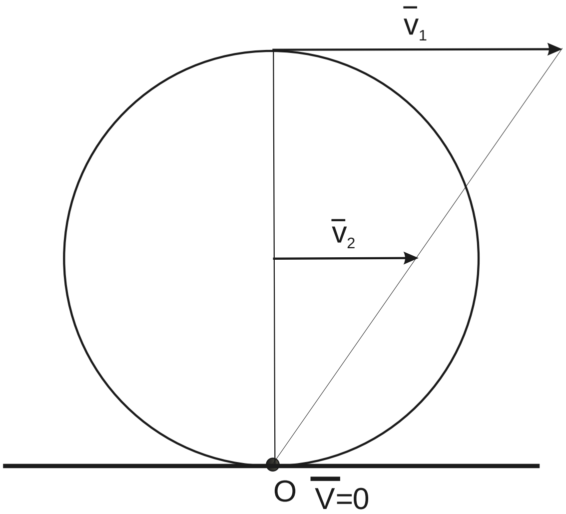


Рисунок 2.20

Мгновенный центр скоростей для катящегося колеса

Мгновенный центр скоростей может располагаться как в пределах тела, так и вне его.

Примеры способов нахождения мгновенного центра скоростей:

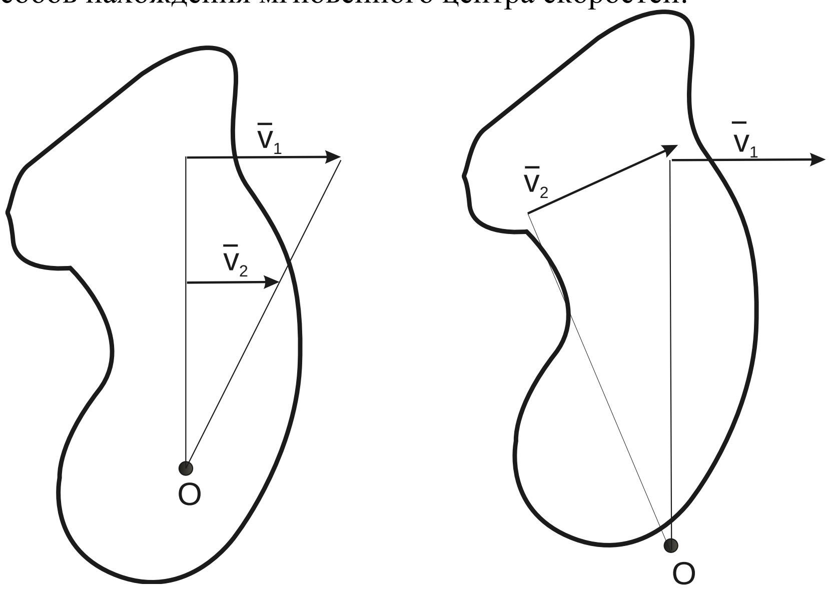


Рисунок 2.21

а б

Поиск мгновенного центра скоростей:

а. по диаграмме скоростей.

б. по точке пересечения перпендикуляров к скоростям.

Реально, конструктивный интерес имеют два способа представления плоского движения: вращение относительно мгновенного центра скоростей и поступательное движение со скоростью центра масс плюс вращение вокруг центра масс (для симметричных тел с постоянной плотностью – центр симметрии)

3. Динамика

Динамика – (раздел механики) наука, изучающая причины возникновения движения, т.е. взаимодействия.

3.1. Свойство инертности

Свойство инертности – свойство тел сохранять состояние покоя. Свойство тел сопротивляться любому внешнему воздействию называется ***инерцией***.

Масса (m) – мера инертности тела.

Измеряется в *килограммах*, $[кг]$.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух тел. Тогда при взаимодействии этих тел прирост их скоростей будет обратно пропорционален массам (мере инертности) этих тел. (*Экспериментальный факт*)

$$\frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Более конкретно:

Пусть (исходя из ряда наблюдений) мы считаем, что можно ввести величину – меру инертности тел. Логично предположить, что стоит вводить эту величину, как величину, обратно пропорциональную приросту скорости тела в процессе взаимодействия с другим телом. Пусть понятие массы ещё не определено.

Тогда, рассмотрим серию экспериментов. Возьмём три тела и рассмотрим их взаимодействие. Примем меру инертности первого тела за единицу:

$$m_1 := 1.$$

Рассмотрим взаимодействие первого тела со вторым и с третьим. Определим из этих экспериментов меру их инертности:

$$\frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_2 = \frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_2},$$

$$\frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_3} = \frac{m_3}{m_1} \Rightarrow m_3 = \frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_3};$$

И, наконец, поставим контрольный эксперимент – проведём взаимодействие второго тела с третьим и проверим, будет ли прирост скоростей обратно пропорциональным мерам инертности этих тел, полученным из предыдущих экспериментов:

$$\frac{\Delta \upsilon_2}{\Delta \upsilon_3} = \frac{m_3}{m_2}.$$

Если это так, то мера инертности (***масса***) может быть введена, и введена корректно. И прирост скоростей тел, полученный ими в процессе взаимодействия будет, действительно, обратно пропорционален отношению этих мер…

Замечание: Инертная и гравитационная массы различны. Одна из них проявляется в свойстве инертности (свойстве тел сохранять состояние покоя), другая – в свойстве тел притягивать к себе другие тела. Эквивалентность этих понятий устанавливается *постулатом об эквивалентности* в рамках общей ***теории относительности***. Однако, доказательная сторона этого вопроса по прежнему остаётся открытой.

Масса обладает свойством ***аддитивности***, для массы *выполняется* ***закон сохранения массы***.

Свойство аддитивности – свойство суммирования. Масса системы, состоящей из нескольких тел равна сумме масс всех тел системы. Аддитивность – это одно из основных свойств массы, позволяющее использовать её, как количественную характеристику, для *определения количества материи* в его основной (*для нас в данный момент*) форме – *в форме вещества*. Пу существу, основная количественная характеристика *количества вещества*. Однако не путать с физической величиной ***количество вещества***.

Свойство аддитивности на первый взгляд является очевидным. Однако это не так. Поясним на примере. Объём в геометрии является аддитивной вкличиной: сумарный объём двух кубиков со сторонами по одному метру - два кубических метра. Оди кубический метр плюс 0.1 кубический метр - всегда 1.1 кубический мптр. Но если мы возьмём 0.1 м^3 NaCl в виде монокристалла и 1 м^3 воды и соединим их, суммарный объём будет меньше, чем 1.1 м^3 за счёт растворения соли в воде. Таким образом, объёем вещества не может быть аддитивной его характеристикой, и следовательно, мерой его количества. Ели же взять 1 кг воды и 0.1 кг NaCl то в любом случае мы получим суммарную массу системы равной 1.1 кг.

Теперь скажем пару слов по поводу ***закона сохранения***. Его формулировка:

Масса изолированной *(с точки зрения обмена веществом с окружающей средой)* ***системы остаётся постоянной.***

В этом заключается проявление закона сохранеия вещества. Можно утверждать, что этот закон является более фундаментальным, чем, скажем, закон сохранеия количества вещества (закон сохранения физической величины количество вещества). Действительно, мы можем посчитать по штукам или оценит количество в молях того или иного вещества и утверждать, что это количество останется неизменным. Однако данный закон нарушится при первой же химической реакции – одно химическое соединение исчезнет, другое возникнет. Однако постоянным останется количество атомов каждого из элементов. Но и это постоянство будет нарушено в результате первой же ядерной ракции – процесса распада атомного ядра или превращения атомаьодного элемента в другой путём захвата или излучения той или иной элементарной частицы (или что-то подобное). Суммарная же масса системы во всех этих случаях останется постоянной.

Данный закон сохранеия будет беспрекословно выполняться на проятжении всей склассической механики. Проблемы с законом сохранения массы начнутся с переходом в область физики, описываемую *релятивистской механикой*. В общем случае там будет выполняться закон сохранения энергии и соотношение Эйнштейна об *эквивалентности массы и энергии* ($\boldsymbol{E=mc^2}$). Но об этом мы поговорим позже.

3.2. Системы единиц

Система единиц определяет единицы измерения физических величин и связь между ними. На сегодняшний день общепринятой и официально утвержденной является система СИ (утверждена ГОСТом). Помимо СИ в ряде случаев употребляется СГС (сантиметр–грамм–секунда), а точнее один из ее вариантов – Гауссова система.

Система единиц основывается на 7-и основных единицах измерений. Эти единицы не могут быть определены исходя из расчёта через другие единицы измерения, а определяются сравнением с эталоном. Набор этих единиц и эталонов един для всех систем и охраняется международной метрологической системой. Надо отметить, что система СГС базируется на тех же стандартах физических величин, что и СИ.

Мера инертности – масса является основной физической единицей и до 2019 года определялась по сравнению с эталоном 1 кг, который храниться, как образец (основной эталон храниться в Париже, второй в Санкт-Петербурге в институте метрологии им. Менделеева). Масса была последней единственной, на сегодняшней день, единицей измерений, эталон которой является «экспонатом, хранящемся в музее».

Надо отметить, что масса – единственная физическая величина, у которой оставался открытым (с точностью до постулата эквивалентности…) способ её сравнения с эталоном. Для гравитационной массы единственным и неповторимым является взвешивание на весах (сравнение масс в поле тяготения земли). Для инертной массы можно предложить, скажем, сравнительный эксперимент на крутильных весах (определение из сравнения по определяемому массой центростремительному ускорению).

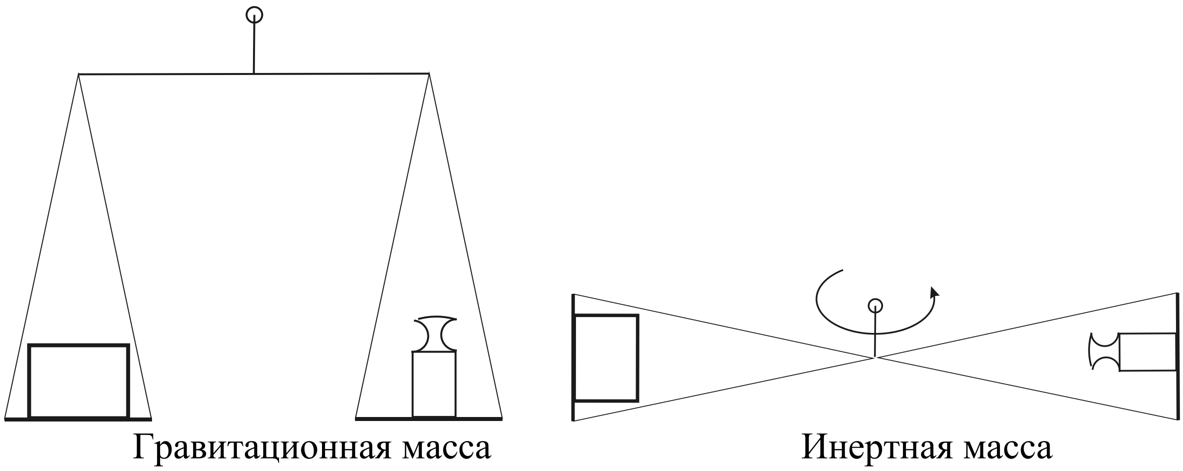


Рисунок 3.1

Измерение гравитационной и инертной масс

Эталоны всех остальных единиц измерений уже давно являлись серьёзные экспериментальные установки, позволяющие определить данную единицу измерения из сравнения с фундаментальными физическими мерами (длиной волны излучения атома, периодом излучения, …). Ниже мы приведём таблицу основных физических величин и их эталонов, действовавших до 2019 года. Принята в 2019 году новая система СИ серьёзно отличается от старой. Но о ней мы поговорим, когда дойдём до раздела *квантовой механики*, поскольку для её определения существенно необходимы знания ряда квантово-механических явлений.

Таблица 3.1

Основные физические величины СИ (*со стандартами до 2019 года*)

Название	Единица измерения				Описание стандарта
	СИ		СГС		
	rus	eng	rus	eng	
Время, t	с (секунда)	s	с	s	*Секунда* равна 9192631770 периодам излучения при переходе атома Cs_{133} между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния
Длина, l	м (метр)	m	см	sm	*Метр* – длина пути, проходимая светом в вакууме за 1/299 792 458с
Масса, m	кг (килограмм)	kg	г	g	*Килограмм* равен массе международного прототипа килограмма
Сила электрического тока, I	А (ампер)	A	1 СГС = $3{,}33564 \cdot 10^{-10}$с	…	*Ампер* равен силе тока, при которой два бесконечных длинных проводника, расположенных на расстоянии 1 метра притягиваются с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м
Термодинамическая температура, T	К (Кельвин)	K	К	K	*Кельвин* равен 1/273.16 части термодинамической температуры тройной точки воды

Продолжение таблицы

Название	Единица измерения				Описание стандарта
	СИ		СГС		
	rus	eng	rus	eng	
Количество вещества, ν	моль	moil	моль	moil	*Моль* равен количеству структурных элементов системы, сколько содержится атомов в 0.012 кг C_{12}
Сила света, *I*	кд (кандел)	kd	кд	kd	Кандела равна силе света в заданном направлении, которая испускается источником монохроматического излучения с частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц с силой излучения 1/682 Вт/ср

Исторически Прообразом, предшественником системы СИ является метрическая система, принятая Парижской академией наук в 1791 году. Тогда же впервые были введены единые стандарты основных физических величин.

Единица длины 1 метр, введённый в 1791 году Парижской академией наук, составлял одна сорокамиллионная (1/40 000 000) часть длины Парижского меридиана (то есть одна десятимиллионная часть расстояния от северного полюса до экватора по поверхности земного эллипсоида на долготе Парижа). Его стандарт представлял «кусок металлического рельса» (сечение эталона скорее походило на буквы «**X**»), хранящейся в подвалах Парижской академии наук.

В дальнейшем научная деятельность была направлена на создание более точных методов сравнения измеряемых образов с эталоном. Так Майкельсоном был создан интерферометр (о нём мы поговорим позже, в разделе оптики, он также прославился тем, сто на нём было доказано постоянство скорости света, постулируемое в *специальной теории относительности*), на котором он проводил точные сопоставление длин.

В дальнейшем разработка таких установок привела к тому, что эталоны в биде «реальных музейных экспонатов» превратились в сложные физические установки, где, в частности, длина измеряемого образца уже сравнивалась с длиной волны определённого излучения.

Так с 1960 года метр, по определению равен 1 650 763.73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$-$5d_5$ атома криптона 86 (^{86}Kr), что с высокой точностью составляет длину эталона метра. Установка для сравнения единицы длины с эталоном представляла собой высокоточный интерферометр (прибор, действие которого основано на законах интерференции).

Параллельно, с увеличением точности измерений (точности сравнения образца с эталоном), проводились работы по уточнению значения *фундаментальных констант*. Одной из таких констант является *скорость света*. И эти исследования привели к тому, что точность, с которой удалось определить эти константы, стала равняться (или даже превосходить) ту точность, которую физически можно было извлечь из тех или других эталонов. Тогда было принято решение зафиксировать значение этих констант, а установки, которые до этого использовались для их определения, переориентировать для определения данной величины для измеряемого образца. Так произошло со длиной и скоростью света. Дело в том, что к 1983-у году та точность, которую можно было обеспечить для определения скорости света современными для того времени способами гораздо превосходила ту точность, которую можно было «извлечь» из предыдущего стандарта длины – 1 метра. При этом стандарт времени – атомные часы – обладал (и обладает на сегодняшний день) гораздо большей, чем стандарт 1 метра того времени. И так…

С 1983 г., согласно новому определению, за 1 метр была принята длина пути, проходимой светом в вакууме за 1/c долю секунду, где $c=2.99792458 \cdot 10^8$ м/с. Считая, следуя специальной теории относительности, скорость света постоянной, и, принимая, с этого момента её измеренное значение за определяющую константу (за величину, определяющую связь, между расстоянием и временем), таким образом можно ввести фундаментальное значение длины, через единицу измерения времени.

С точки зрения же стандарта измерения, за эталон метра принимается длина, определяемая в ходе очень сложного физического эксперимента по сравнению с длинами волн различного лазерного излучения, которые могут быть рассчитаны с высокой точностью, благодаря знанию с высокой точностью фундаментальных констант (~~помимо скорости света с, для пересчёта стандарта в количество длин волн необходимо знать и постоянную Планка –~~ ~~h=6.626 075 5(40) $\times 10^{-34}$ Дж·с до 2019 г и 6.62607015$\times 10^{-34}$ Дж·с после~~ – в литературе встречается такое заявление, но это в корне неверно; об этом позже, в рамках рассмотения квантовой механики). Сам эталон, как и прежде, представляет собой интерферометр. Только, теперь уже *лазерный интерферометр*.

Секунда исторически определялась из суточного вращения Земли (24 ч. в сутках, 60 мин. в часе, 60 с. в минуте). Она не требовала для себя стандарта – суточный оборот земли очень точно умели определять по звёздам. Единица массы в метрической системе исторически вводилась, как масса 1 дм^3 (10^{-3} м^3) воды. А её первый (и до 2019 года единственный) стандарт представлял собой два «кирпича», лежащих в подвалах Парижского и Санкт-Петербуржского хранилищ.

Эталоны всех физических величин претерпели значительное усовершенствование в плане увеличения точности измерений. Так в определении силы тока речь, конечно, не идёт о двух безконечно длинных проводниках. В предпоследней СИ до 1989 года стандарт ампера представлял собой установку – *токовые весы*. Они позволяли смоделировать эксперимент с помощью магнитной катушки и втягивающегося в неё сердечника. С 1989 года для определения силы тока было предложено использовать квантовые эффекты Джозефсона и Холла.

Новая систем СИ, принятая в 2019 году полностью была переведена ан определение эталонов через принятие точных значений ряда фундаментальных констант (скорости света ***c***, постоянной Планка ***h***, заряда электрона ***e***, постоянной Больцмана ***k***, постоянной Авогадро $\boldsymbol{N_A}$ и постоянной $\boldsymbol{K_{cd}}$). Но об этом мы поговорим позже.

Вернёмся к системам СИ и СГС. Система СИ является более «технической» или «инженерной» и наиболее удобна в технических, инженерных, прикладных расчётах. С другой стороны, система СГС более «физична». В ней более красило и просто (без коэффициентов) выглядит ряд физических законов. Надо отметить, что в ряде случаев, когда того требует простоты физических вычислений (космология, физика высоких энергий, теория поля), физики переходят к таким, скажем, системам, где за основу берётся равенство единице скорости света ***c*** и постоянной Планка $\hbar$.

Так же, той и другой системой вводятся две внесистемные (*дополнительные*) единицы:

- **Плоский угол** – *радиан* (рад, rad). 1 рад – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.
- **Телесный** угол – *стерадиан* (ср, sr). 1 ср – телесный угол, опирающийся на площадь, вырезанную на сфере, равную площади квадрата со сторонами, равными радиусу сферы.

Международной системой единиц СИ допускается использование кратных величин:

$$\begin{array}{ll}
\textit{Дека}\,10^{1}\left[\textit{да}\right] & \textit{Деци}\,10^{-1}\left[\textit{д}\right] \\
\textit{Санти}\,10^{-2}\left[\textit{с}\right] & \textit{Гекто}\,10^{2}\left[\textit{г}\right] \\
\textit{Мили}\,10^{-3}\left[\textit{м}\right] & \textit{Кило}\,10^{3}\left[\textit{к}\right] \\
\textit{Микро}\,10^{-6}\left[\textit{мк}\right] & \textit{Мега}\,10^{6}\left[\textit{М}\right] \\
\textit{Нано}\,10^{-9}\left[\textit{н}\right] & \textit{Гиго}\,10^{9}\left[\textit{Г}\right] \\
\textit{Пико}\,10^{-12}\left[\textit{п}\right] & \textit{Тера}\,10^{12}\left[\textit{Т}\right]
\end{array}$$

$$\text{Фемто}\,10^{-15}\,[ф] \qquad \text{Пета}\,10^{15}\,[П]$$

Замечание: $кг$ и $г$ (килограммы и граммы) – кратные величины. Следовательно, использование и той и другой допускается системой СИ. Однако производная единица СГС уже не является допустимой, с точки зрения системы СИ, вносит путаницу и приводит к ошибкам.

$$(СИ)\ \mu = \left[{}^{кг}\!/_{моль}\right]$$

$$(СГС)\ \mu = \left[{}^{г}\!/_{моль}\right]$$

Конкретно. Величина, взятая напрямую из таблицы Менделеева, как атомная масса в у.е.м. (углеродных единицах массы) является молярной самой вещества в *г/моль*. Для перевода в СИ её надо помножить на 10^{-3}. Так углерод ^{12}C, с атомноё массой 12 у.е.м., имеет молярную массу $12\cdot10^{-3}$ *кг/моль*.

Другие случаи различия в производных единицах той и другой систем

СИ	СГС	Величина
$p = \left[\frac{кг\cdot м}{с}\right]$	$p = \left[\frac{г\cdot м}{с}\right]$	*давление,*
$F = [н] = \left[\frac{кг\cdot м}{с^2}\right]$	$F = \left[\frac{г\cdot см}{с^2}\right]$	*сила.*

Отдельно стоит отметить две экзотические системы единиц, иногда применяемые в теоретических расчётах:

$e=m_e=\hbar=1$ *(система атомных единиц Хартри),*

$c=m_e=\hbar=1$ *(система релятивистских единиц).*

Элементарный заряд (заряд электрона по модулю), масса покоя электрона и постоянная Планка равны единицы либо скорость света, масса покоя электрона и постоянная Планка равны единице. Эти системы единиц удобны в серьёзных теоретических расчётах, когда константы не имеют особого значения и лишь усложняют процесс вывода результата.

3.3. Импульс

Рассмотрим соотношение, исходя из которого, было введено понятие массы:

$$\frac{\Delta \upsilon_1}{\Delta \upsilon_2} = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

Преобразуем его:

$$\Delta \vec{v}_1 m_1 = \Delta \vec{v}_2 m_2$$

$$\left|\Delta \overline{\mathrm{v}}_1\right| m_1 = \left|\Delta \overline{\mathrm{v}}_2\right| m_2$$

Или, учитывая, что $\Delta \overline{\mathrm{v}}_1 \uparrow\downarrow \Delta \overline{\mathrm{v}}_2$

$$\Delta\left(m_1 \overline{\mathrm{v}}_1\right) = -\Delta\left(m_2 \overline{\mathrm{v}}_2\right).$$

$$\Delta \overline{p}_1 = -\Delta \overline{p}_2 ,$$

где $\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}}$ – импульс (импульс тела, импульс материальной точки).

Далее:

$$\Delta \overline{p}_1 = -\Delta \overline{p}_2$$

$$\Delta \overline{p}_1 + \Delta \overline{p}_2 = 0$$

$$\Delta\left(\overline{p}_1 + \overline{p}_2\right) = 0$$

$$\sum \overline{p} = const .$$

Мы получили, что, при соответственном введении физических величин, вновь определённая нами физическая величина *импульс* отвечает закону: векторная сумма импульсов взаимодействующих тел остаётся постоянной (не изменяется). Это есть *закон сохранения импульса*.

Замечание: устаревшее название импульса – *«количество движения»*. Следует использовать современную терминологию, но не путаться при чтении старых текстов.

Df 1. ***Импульсом материальной точки*** называется векторная величина, равная произведению массы на скорость.

$$\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}} \tag{3.1}$$

Измеряется в *килограммах, умноженных на метр и делённых на секунду* $\left[кг \cdot м/с\right] = \dfrac{[кг][м]}{[с]}$.

Df 2. ***Импульсом системы материальных точек (твёрдого тела)*** называется величина, равная векторной сумме импульсов всех материальных точек.

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{N} \overline{p}_i . \tag{3.2}$$

3.4. Динамика движения материальной точки (законы Ньютона)

I закон Ньютона.

Существуют такие системы отсчета, называемые ***инерциальными****, в которых тела сохраняют состояние покоя или же равномерного движения, если на них не действуют другие тела или их действие скомпенсировано.*

Замечание 1. Определение инерциальных систем отсчета

Инерциальные системы отсчета – это в точности все системы отсчета удовлетворяющие *I закону Ньютона*.

Также можно утверждать, что эта система отсчета связана с *невзаимодействующими телами* или со *свободно движущимися телами* (*что на самом деле одно и то же*). Однако, при этом определении, за инерциальную систему отсчёта можно принять систему отсчёта связанную с вращающимся телом (это тело ни с чем не взаимодействует и движется свободно). В принципе, её будет не отличить (по формальному принципу) от любой инерциальной системы. Введение же уточнения, что системе отсчёта не должна вращаться приведёт к необходимости введения системы отсчёта, так как говорить о вращательном движении можно только с точки зрения уже введённой системы отсчёта… Таким образом, последние два определения могут рассматриваться, как физический смысл инерциальной системы отсчёта, но, ни в коем случае, ни как её определение.

Замечание 2. Как следует из замечания 1, *I закон Ньютона* по существу является определением *инерциальных систем отсчета*. В этом случае силу закона составляет утверждение, что эти системы существуют. Однако, найти такие системы не просто. По большому счёту, ни одна система отсчёта на Земле не является инерциальной. С достаточной степенью точности за инерциальные системы отсчета можно принять гелиоцентрическую систему (связанная с Солнцем).

Замечание 3. Очевидно, что все инерциальные системы отсчёта будут двигаться друг относительно друга *равномерно и прямолинейно*. Действительно, если какая-то система отсчёта движется относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, то покоящиеся или равномерно движущиеся в последней тела будут двигаться в ней равномерно и прямолинейно. Если же система отсчёта движется относительно инерциальной с ускорением, то все покоящиеся в последней тела в новой системе отсчёта будут двигаться с ускорением.

Важно!!! Здесь и далее если все рассматриваемые системы отсчета, если не отмечено отдельно, будем считать инерциальными.

Абсолютность ускорения во всех инерциальных система отсчёта.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта, одна из которых движется относительно другой. В таком случае это движение носит прямолинейный равномерный характер. По правилу сложения скоростей:

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{v'}\,.$$

Продифференцируем правую и левую части уравнения:

$$\frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\overline{\mathrm{v}_0}}{dt} + \frac{d\overline{\mathrm{v}'}}{dt}.$$

Из постоянства скорости $\overline{\mathrm{v}_0}$ следует:

$$\overline{\mathrm{v}_0} = const \Rightarrow \frac{d\overline{\mathrm{v}_0}}{dt} = 0.$$

Отсюда:

$$\underbrace{\frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt}}_{\overline{a_0}} = \underbrace{\frac{d\overline{\mathrm{v}'}}{dt}}_{\overline{a}}.$$

В итоге, имеем искомое утверждение:

$$\overline{a_0} = \overline{a}$$

– во всех инерциальных системах отсчёта ускорение остаётся постоянным.

Как следствие мы получаем ***принцип относительности Галилея***:

Все уравнения механики записываются одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. *Все* ***законы механики одинаково выглядят во всех инерциальных системах отсчёта***.

II закон Ньютона.

Сумма всех сил (равнодействующая), приложенная к телу (материальной точке) пропорциональна произведению массы этого тела на вызываемое ими ускорение:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F_i} \tag{3.3}$$

иначе

$$m\overline{a} = \overline{F}, \tag{3.4}$$

где $\overline{F} = \sum \overline{F_i}$ – равнодействующая всех сил, действующих на тело.

Замечание 1. Исходная формулировка закона «*сила, приложенная к телу пропорциональна…****».*** Необходимо отдельно отметить *принцип суперпозиции*. Если на тело действуют не одна, а несколько сил, их действие эквивалентно действию на тело одной силе равной векторной сумме всех действующих на него сил. Это утверждение есть *отдельный экспериментальный факт*. Приложим к телу по очереди несколько сил, и определим их величину (*скажем, по закону Гука, одолжив у бабушки на рынке «безмен» определяя абсолютную величину силы по показаниям на его шкале*). Вычислим векторную сумму этих сил, а затем приложим к телу все эти силы одновременно или одну силу, равную их векторной сумме. Результат (*с точки зрения вызываемого ускорения*) будет одинаков. Если задуматься, данное утверждение не столько уж и тривиально. Будь сила, скажем, тензорной величиной (задавайся она 3 на 3 матрицей), такой трюк уже бы не прошел!

Замечание 2. Форма записи достаточно важна для правильного понимания формулировки закона. В данной транскрипции в левой части уравнения стоят величины, относящиеся к самому телу (*мера инертности и величина, характеризующая его кинематику – масса*), а в правой мера взаимодействия тел (*мера воздействия на тело других тел*).

В принципе, допустима и обратная запись выражения $\bar{F} = m\bar{a}$. Это зависит от того какой математической формой записи (*левой* или *правой*) пользуется автор. Главное помнить о причинно-следственной связи. Взаимодействие тел, то есть сила, является причиной, вызывающей следствие – ускорение, которое, будучи помноженным на меру инертности – массу, оказывается пропорционально этой силе.

Замечание 3. В системе СИ и СГС коэффициент пропорциональности равен 1.

Замечание 4. По существу, II закон Ньютона мог бы являться определением силы, однако при этом он бы утратил силу закона. Поэтому будем утверждать, что сила (*по определению*) есть мера взаимодействия двух тел, или мера воздействия одного тела на другое, которая может быть определена из сравнения с другими силами хотя бы по закону Гука (сила упругости). В этом случае *II закон Ньютона* показывает связь между характеристиками самого тела (мера инертности массы и кинетическая характеристика ускорения) и мерой взаимодействия двух тел.

Замечание 5. Под определением любой физической величины обычно понимается способ ее вычисления или измерения. Не следует путать определения в этом случае с физическим смыслом. Исключение составляют ряд базовых величин, определение которых лежит в области философии и сводится к физическому смыслу. В этом случае способ измерения физических величин относится к метрологии и определяется определением единиц ее измерения. Метрологические единицы силы определяются из *II закона Ньютона*: $[H]=[кг]\cdot\frac{[м]}{[c]^2}=\frac{[кг][м]}{[c]^2}$.

И так. Определение:

<u>Df.</u> *Сила* – мера взаимодействия двух тел.

Измеряется в *ньютонах*, $[H]=\frac{[кг][м]}{[c]^2}$. Международное обозначение $[N]$.

Формулировка II закона Ньютона через импульс (импульсная формулировка):

$$m\bar{a} = \bar{F},\, \bar{a} = \frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\bar{a} = m\frac{d\bar{\mathrm{v}}}{dt};$$

При **m=const** имеем:

$$m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Подставляя в исходное выражение, получаем:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} \qquad (3.5)$$

Равнодействующая всех сил, приложенная к телу равна скорости изменения импульса этого тела.

Замечание. Данная формулировка II закона Ньютона *является основной*, т.е. более фундаментальной.

Пример с ***m≠const***: реактивное движение.

Пусть $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$, если взаимодействия нет $\bar{F} = 0$.

Тогда, имеем:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = 0$$

По определению импульса

$$\bar{p} = m\bar{v}.$$

Подставим формулу в исходное выражение и продифференцируем:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} = ma + u\bar{v} = 0.$$

Здесь $u = \frac{dm}{dt}$ – скорость выброса реактивной струи, $\left[\frac{кг}{с}\right]$.

В итоге,

$$m\bar{a} + u\bar{v} = 0,$$

$$m\bar{a} = -u\bar{v}.$$

Произведение массы на ускорение ракеты пропорционально скорости реактивной струи.

Дифференциальная и интегральная формулировка.

$d\bar{p} = \bar{F}dt$ – *элементарное приращение импульса равно произведению силы на элементарный промежуток времени её действия.*

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_{p_1}^{p_2} d\bar{p} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt$$

Для импульса имеем:

$$\int_{p_1}^{p_2} d\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \Delta\bar{p}.$$

Для силы: $\bar{F} = const$ $\qquad\qquad$ $\bar{F} \neq const$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \bar{F}(t_2 - t_1) = \bar{F}\Delta t \qquad\qquad \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \underbrace{\frac{\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt}{\Delta t}}_{\bar{F}_{ср.}} \cdot \Delta t = \bar{F}_{ср.}\Delta t$$

Приравнивая правую и левую части равенства, получаем:

$$\Delta\bar{p} = \bar{F}\Delta t \qquad\qquad \Delta\bar{p} = \bar{F}_{ср.}\Delta t \tag{3.6}$$

Произведение силы на интервал времени ее действия называется импульсом силы:

$\bar{F}\Delta t$ *– импульс силы.*

Т.о. *имеем* ***формулировку II закона Ньютона****: изменение импульса тела равно импульсу силы*.

III закон Ньютона

Тела взаимодействуют с силами равными по величине и противоположными по направлению:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \tag{3.7}$$

(*Сила действия равна силе противодействия*, если не учитывать направления векторов)

Замечание 1. III закон Ньютона справедлив лишь для приближенной модели точечных взаимодействий.

Замечание 2. Математически, *II закон Ньютона* совместно с *III законом Ньютона* образует полную систему уравнений (систему уравнений, имеющую единственное решение). При этом *I закон Ньютона* постулирует принципиальную возможность написания этой системы. По существу, с точки зрения математики, речь идёт о том, что в некоторой *«хорошей»* системе отсчёта, называемой ***инерциальной***, произведение ***масс*** и ***ускорений*** системы тел можно связать в ***полную систему уравнений*** посредством *взаимодействий*, выразив их через *физическую величину* – ***сила***.

В конце можно сослаться на формулировки основных определений законов самого *Исаака Ньютона*, его труд «Математические начала натуральной философии».

3.5. Силы природы и фундаментальные взаимодействия

Все известные в природе силы определяются четырьмя фундаментальными взаимодействиями (сводятся к ним):

(1) ***гравитационное,*** **(2)** ***электромагнитное,***
(3) ***сильное,*** **(4)** ***слабое.***

Сильное и *слабое* взаимодействия проявляются только в микромире. В макромире – электромагнитное и гравитационное взаимодействия. Большинство физических сил (сил природы), так или иначе, сводятся к электромагнитному взаимодействию (кроме всемирного тяготения).

Виды сил

Сила упругости:

$$F = -kx, \tag{3.8}$$

где x – удлинение пружины,
k – коэффициент упругости,

$$k = \frac{ES}{l},$$

E – модуль Юнга,
S – площадь поперечного сечения,
l – длина (пружины, деформируемого тела…).

Знак «–» показывает, что сила направлена в сторону, противоположную удлинению.

В векторном виде можем представить уравнение, как

$$\bar{F} = -k\bar{x},$$

где $\bar{x}$ – вектор удлинения пружины или смещения из положения равновесия.

Сила сопротивления:

$$\bar{F}_{сопр} = -\delta' \bar{v}, \tag{3.9}$$

$$\bar{F}_{сопр} = -\delta'' v^2 \left(\frac{\bar{v}}{v} \right), \tag{3.10}$$

где δ', δ'' – коэффициент пропорциональности.

$\bar{e} = \dfrac{\bar{v}}{v}$ – единичный вектор направления скорости.

Сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости при низких скоростях или квадрату скорости, если скорость велика:

$$v \ll \quad \Rightarrow F \sim v,$$

$$v \gg \quad \Rightarrow F \sim v^2.$$

Конкретно это обычно видно из условия задачи (определяется условием задачи).

Сила трения:

Сила трения пропорциональна силе реакции опоры

$$F_{тр} = \mu N, \tag{3.11}$$

где

N – сила реакции опоры, см. ниже.

μ – коэффициент трения.

Учитывая, что $\bar{F}_{тр} \uparrow\downarrow \bar{v}$ *или* $\bar{F}_{тр} \uparrow\downarrow d\bar{r}$,

где $d\bar{r}$ – элементарное перемещение, уравнение можно записать в векторном виде:

$$\bar{F}_{тр} = -\mu N \cdot \left(\frac{\bar{v}}{v}\right) \text{ или } \bar{F}_{тр} = -\mu N \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{dr}\right).$$

Замечание: *сила реакции опоры* **N** или сила нормального давления (устаревшее название) – это сила, действующая на тело со стороны опоры перпендикулярно её поверхности.

Сила всемирного тяготения (Ньютона):

$$F_{в.т.} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{3.12}$$

где $$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2}$$

– гравитационная постоянная.

Сила всемирного тяготения прямо пропорциональна массам тяготеющих тел и обратно пропорциональна расстоянию между ними.

Замечание: в данном случае под массой понимается гравитационная масса, в отличие от инертной массы, которая присутствовала во II законе Ньютона. Эквивалентность этих двух масс постулируется в рамках ОТО (*Общая Теория Относительности*) Эйнштейна.

В векторной форме:

$$\bar{F}_{в.т.} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \left(\frac{\bar{r}}{r}\right), \tag{3.13}$$

где $G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{с^2 \cdot кг}$ – гравитационная постоянная

$\bar{e}_r = \frac{\bar{r}}{r}$ – единичный вектор направления,

Дополнительное ***замечание*** *об инертной и гравитационной массе:*

В двух нижеприведённых уравнениях, вообще говоря, присутствуют две разных массы, равенство которых постулируется (в рамках *Общей Теории Относительности*), но не является очевидным доказанным фактом.

$\bar{F} = m\bar{a}$ – здесь ***m*** – инертная масса,

$\bar{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \bar{e}_r$ – здесь ***m*** – гравитационная.

Сила тяжести:

Сила притяжения (сила всемирного тяготения, действующая на тела со стороны Земли вблизи ее поверхности):

$$\overline{F}_{тяж.} = m\overline{g} \cdot \qquad (3.14)$$

Принимая постулат об эквивалентности, для тела, находящегося вблизи поверхности земли, имеем:

$$\overline{F}_{тяг.} = -G\frac{Mm}{R^2_{земли}} \cdot \overline{e}_r$$

$$m\overline{g} = \overline{F}_{тяг.} \qquad \textit{(\textbf{II} закону Ньютона)}$$

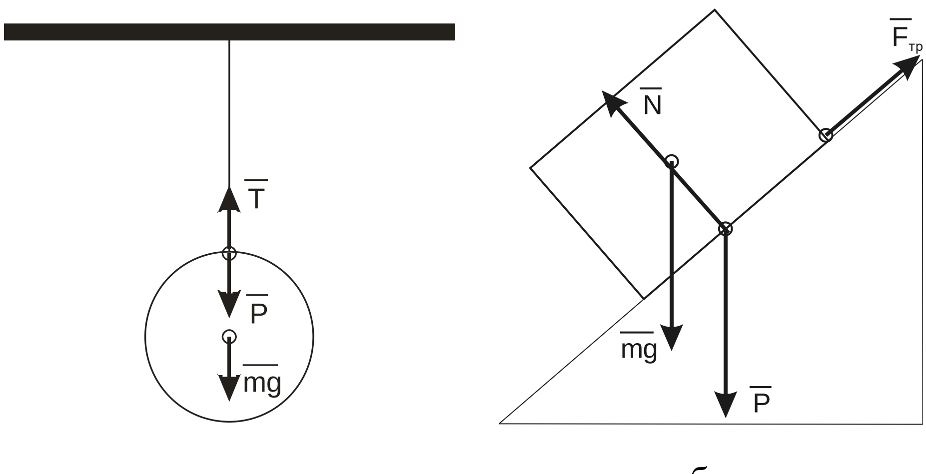
$$\cancel{m}\overline{g} = -G\frac{M\cancel{m}}{R^2_{земли}} \cdot \overline{e}_r$$

$$\overline{g} = -G\frac{M}{R^2_{земли}} \cdot \overline{e}_r$$

– ускорение свободного падения не зависит от природы тела.

Вес тела:

Сила, действующая со стороны тела на опору или подвес: $\overline{P}$



а б

Рисунок 3.2

Вес тела: а – сила, действующая на подвес, б – сила, действующая на опору

$m\overline{g} + \overline{T} = m\overline{a}$ $\qquad$ $m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_{тр} = m\overline{a}$ – по **II** *закону Ньютона*,

$\overline{T} = -\overline{P}$ $\qquad$ $\overline{N} + \overline{F}_{тр} = -\overline{P}$ – по **III** *закону Ньютона*

Подставляя, и втом и в другом случае получаем:

$$m\overline{g} - \overline{P} = m\overline{a}$$

$$\overline{P} = m\overline{g} - m\overline{a}$$

$$\overline{P} = m\left(\overline{g} - \overline{a}\right). \qquad (3.15)$$

Сила электростатического притяжения – закон Кулона:

Силы между двумя элементарными (точечными) заряженными телами. Заряд тела может иметь как положительный, так и отрицательный знак. Одинаково заряженные тела отталкиваются, разноимённо заряженные – притягиваются.

«+» и «+» или «–» и «–» отталкиваются,

«+» и «–» притягиваются

Сила определяется законом Кулона:

$$F_{эл.стат} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{3.16}$$

В векторном виде:

$$\overline{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\left(\frac{\overline{r}}{r}\right), \tag{3.17}$$

где $\overline{e}_r = \dfrac{\overline{r}}{r}$ – единичный вектор направления (по линии, соединяющей заряды),

q_1 и q_2 – величины электрических зарядов обоих тел,

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности (в системе СИ),

ε – диэлектрическая проницаемость среды,

ε_0 – электрическая постоянная.

3.6. Динамика движения механической системы и абсолютно твёрдого тела

3.6.1. II закон Ньютона для твёрдого тела или механической системы

Рассмотрим II закон Ньютона для системы материальных точек. Как мы говорили выше, любое тело можно представить, как систему материальных точек. Именно это и сделаем мы сейчас. Позже мы покажем, что те же законы будут справедливы и для конечной системы тел конечного размера – для любой механической системы. Но для этого сначала необходимо разобраться хотя бы с одним телом.

Как было сказано выше, под импульсом системы материальных точек будем понимать векторную сумму импульсов всех материальных точек:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{N}\overline{p}_i$$

Df 1. ***внутренними силами*** для механической системы будем называть силы, действующие между элементами этой системы (телами, материальными точками и т.д.)

Df 2. ***внешними силами*** для механической системы будем называть силы, действующие на элементы системы со стороны тел, не входящих в эту систему. Иногда будем представлять внешние силы как силы, действующие на элементы системы со стороны окружающей среды, не конкретизируя создающие их тела.

Рассмотрим систему материальных точек: пусть на систему действуют силы и между элементами системы действуют внутренние силы. Обозначим равнодействующую всех внешних сил, действующих на ***i-ую*** материальную точку $\overline{F}_i$. Обозначим через $\overline{F}_{ij}$ внутреннюю силу со стороны ***j-ой*** материальной точки на ***i-ую***, а их сумма будет $\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{M} \overline{F}_{ij}$

Запишем ***второй закон Ньютона для системы материальных точек*** (систему из M уравнений)***:***

$$\frac{d\overline{p}_1}{dt} = \overline{F}_1 + \sum_{j=2}^{M} \overline{F}_{1j}$$

$$\frac{d\overline{p}_2}{dt} = \overline{F}_2 + \sum_{\substack{j\neq 2 \\ j=1}}^{M} \overline{F}_{2j}$$

$$\dots$$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = \overline{F}_i + \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{M} \overline{F}_{ij}$$

$$\dots$$

$$\frac{d\overline{p}_M}{dt} = \overline{F}_M + \sum_{j=1}^{M-1} \overline{F}_{Mj}$$

Просуммируем все полученные уравнения:

$$\frac{d\overline{p}_1}{dt} + \frac{d\overline{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\overline{p}_M}{dt} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \dots + \overline{F}_i \dots + \overline{F}_M +$$

$$+ \sum_{j=2}^{M} \overline{F}_{1j} + \sum_{\substack{j\neq 2 \\ j=1}}^{M} \overline{F}_{2j} + \dots + \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{M} \overline{F}_{ij} + \dots + \sum_{j=1}^{M-1} \overline{F}_{Mj}$$

Заменим сумму производных импульсов производной суммы (поменяем местами операции суммирования и дифференцирования). Также, обозначим сумму внешних сил, действующих на все материальные точки, как $\overline{F}$:

$$\frac{d}{dt}(\overline{p}_1 + \overline{p}_2 + \ldots + \overline{p}_M) = \overline{F} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \overline{F}_{ij}$$

Тоже самое, в сокращённой, символической форме:

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{d\overline{p}_1}{dt} = \sum_{i=1}^{M} \overline{F} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \overline{F}_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} \sum \overline{p}_i = \overline{F} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \overline{F}_{ij}$$

Рассмотрим левую часть последнего равенства. Она представляет производную по времени от импульса всей системы (*импульс системы материальных точек есть векторная сумма импульсов всех точек системы*):

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} \overline{F}_{ij}$$

Рассмотрим последнюю сумму $\sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{M} \overline{F}_{ij}$:

Для любого $\overline{F}_{ij}$ существует $\overline{F}_{ji}$, такое что, по Третьему закону Ньютона $\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}$.

$$\forall \overline{F}_{ij} \ \exists \overline{F}_{ji} : \quad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}$$

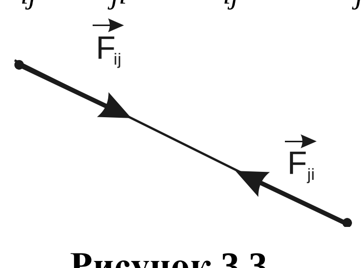


Рисунок 3.3

Уравновешивание внутренних сил по III закону Ньютона

По *III закон Ньютона*:

$$\overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}$$

$$\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji} = \overline{F}_{ij} - \overline{F}_{ij} = 0$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\overline{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^{M}\left(\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji}\right) =$$

$$= \left(\overline{F}_{12} + \overline{F}_{21}\right) + \left(\overline{F}_{13} + \overline{F}_{31}\right) + \ldots + \left(\overline{F}_{M-1,M} + \overline{F}_{M,M-1}\right) = 0$$

В итоге имеем ***II закон Ньютона*** для системы материальных точек: скорость изменения импульса системы материальных точек равна равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}_{Внешних} \tag{3.18}$$

Таким образом, если представить абсолютное тело, как бесконечно большую систему материальных точек, ***II закон Ньютона*** для абсолютно твёрдого тела будет иметь выше приведенный вид, где под импульсом тела следует понимать величину:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{p}_i = \sum_{i=1}^{\infty}m_i\overline{\mathrm{v}}_i = \int \overline{\mathrm{v}}dm = \int \overline{\mathrm{v}}\rho dV$$

(Рассуждения – см. ниже)

Замечание. *Точно так же, для механической системы тел скорость изменения импульса будет равна сумме всех внешних сил действующих на систему*. Только теперь мы уже отчетливо понимаем, что именно мы имеем в виду под импульсом каждого тела в отдельности. Как мы покажем ниже, эту величину так же можно рассчитать, как произведение массы тела на скорость его центра масс.

3.6.2. Центр масс

Вернёмся к формулировке *II закона Ньютона для абсолютно твёрдого тела* (мы также можем рассматривать некую механическую систему, не представляющую собой единое абсолютно твёрдое тело, а состоящую из нескольких тем или материальных точек – логика рассуждения при этом не поменяется):

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}_{Внешних}$$

Здесь под импульсом понимается импульс системы материальных точек, то есть сумма импульсов всех материальных точек системы:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{M} \overline{p}_i =$$

По определению импульса $\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}}$:

$$= \sum_{i=1}^{M} m_i \overline{\mathrm{v}}_i =$$

По определению скорости $\overline{\mathrm{v}} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$:

$$= \sum_{i=1}^{M} m_i \frac{d\overline{r}_i}{dt} =$$

Внесём массу под знак производной:

$$= \sum_{i=1}^{M} \frac{d(m_i \overline{r}_i)}{dt} =$$

Поменяем местами действие суммирования и дифференцирования:

$$= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{M} m_i \overline{r}_i =$$

Умножим и разделим полученное выражение массу тела или всей механической системы в целом $\left(m = \sum_{i=1}^{M} m_i \right)$, в зависимости от того, что за объект мы рассматриваем. Затем внесём массу, стоящую в знаменателе под знак производной:

$$= \underbrace{\frac{m}{m}}_{1} \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{M} m_i \overline{r}_i = m\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\sum\limits_{i=1}^{M} m_i \overline{r}_i}{m}}_{\overline{r}_{ц.м.}} \right) =$$

Стоящая под знаком производной величина имеет размерность *метров* и по смыслу представляет *радиус-вектор некоторой точки* (в проекциях – *координаты точки*). Назовём эту точку *центром масс*. Тогда:

$$= m\frac{d\,\overline{r}_{ц.м.}}{dt} = m\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.}$$

То есть, *импульс твёрдого тела (или механической системы, в общем случае) может быть представлен, как произведение мессы этого тела (или системы) на скорость центра масс*:

$$\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.}$$

Теперь подставим данное выражение *II закон Ньютона*:

$$\frac{d}{dt}\left(m\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.}\right) = \overline{F}_{Внешних}$$

Получим:

$$m\overline{a}_{ц.м.} = \overline{F}_{Внешних}\,,$$

где

$$\overline{a}_{ц.м.} = \frac{d}{dt}\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.} = \frac{d^2}{dt^2}\overline{r}_{ц.м.}\,.$$

<u>Df.</u> ***Центром масс*** или ***центром инерции*** называется точка, задаваемая радиус-вектором

$$\overline{r}_{ц.м.} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} m_i \overline{r}_i}{m}\,, \qquad (3.19)$$

Либо в координатном представлении:

$$x_{ц.м.} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad (3.20)$$

$$y_{ц.м.} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad (3.21)$$

$$z_{ц.м.} = \frac{\sum m_i z_i}{m} \qquad (3.22)$$

(По определению ***центром масс*** или ***центром инерции*** называется точка с такими координатами)

Тогда выражение ***II закон Ньютона для*** *абсолютно твёрдого тела* или механической системы примет вид:

$$m\bar{a}_{ц.м.} = \bar{F}_{Внешних}, \qquad (3.23)$$

где

$$\bar{a}_{ц.м.} = \frac{d\,\bar{\mathrm{v}}_{ц.м.}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}_{ц.м.}}{dt^2}$$

– ускорение центра масс.

При этом импульс системы материальных точек может быть представлен, как

$$\bar{p} = m\bar{\mathrm{v}}_{ц.м.} \qquad (3.24)$$

Замечание: т.о. *импульс системы материальных точек может быть представлен как произведение массы системы на скорость центра масс*.

II закон Ньютона *для системы материальных точек (через центр масс)*: произведение суммарной массы системы материальных точек на ускорение центра масс равно равнодействующей всех внешних сил действующих на эту систему.

Для материальной точки:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F},$$

где

$$\bar{p} = m\bar{\mathrm{v}},$$

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Для системы материальных точек (для абсолютно твёрдого тела):

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}_{Внешних},$$

где

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{M} \bar{p}_i = m\bar{\mathrm{v}}_{ц.м.},$$

$$m\bar{a}_{ц.м.} = \bar{F}_{Внешних}.$$

В нашем изложении не будем различать центр инерции и центр масс.

Физический смысл центра масс (центра инерции)

1.
   a. Это точка, движение которой не изменилось бы (которая двигалась бы точно также), если бы вся масса была сосредоточена в этой точке и все внешние силы были бы приложены именно к ней.
   b. Это точка, траектория движения которой представляла бы траекторию движения тела, если бы тело можно было принять за материальную точку.
2. Это точка, в которую сжалось бы тело при бесконечно большой силе собственного гравитационного притяжения *(с точностью до принципа эквивалентности ОТО).*

Утверждение ***1a*** *есть суть теоремы о движении центра масс*:

Th. Теорема о движении центра масс. *Центр масс (центр инерции) движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы (или всего тела), на которую действует сила, равная равнодействующая (векторной сумме) всех внешних сил, действующих на механическую систему или тело.*

Замечание. Вообще говоря, центр масс и цент инерции – различные названия одной и той же величины. Однако, под центром масс может ещё пониматься и центр тяжести. Центром тяжести (***Df.***) понимается точка, к которой приложена равнодействующая всех сил тяжести (*либо сил тяготения*), приложенных к телу. Если быть совсем точным, ***центр тяжести*** *– это точка, относительно которой момент всех сил тяжести, приложенных к телу, равен нулю*.

В случае однородного гравитационного поля и при условии, что мы принимаем постулат ОТО об эквивалентности (*напомним, данный постулат утверждает, что физическая величина «масса», входящая во II закон Ньютона и закон всемирного тяготения не просто совпадают по величине, а являются проявлением одной и той же сущности*), эти две точки совпадают.

3.6.3. Представление твердого тела как системы материальных точек

Рассмотрим абсолютно твердое тело.

Разобьем тело на ***N*** частей. Каждую из этих частей можно рассматривать как отдельное тело. Тогда наше тело может быть представлено как система тел (всех рассматриваемых частей), взаимная ориентация которых не меняется (координаты каждого из тел всегда остаются постоянными в системе координат, связанной с одним из тел).

Устремим N к бесконечности ($N \to \infty$). Тогда размеры каждой части устремятся к нулю ($V \to 0$). В этом случае каждую из таких частей можно считать материальной точкой. Т.о. наше тело будет представлено как система материальных точек, где число материальных точек $N = \infty$, объем одной части (элементарный объем) dV_i, масса $dm_i = \rho dV_i$ – элементарная масса. Тогда объем всего тела V и его масса m могут быть представлены, как:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} dV_i = \int dV \qquad \text{объем тела}$$

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} dm_i = \int \rho dV \qquad \text{масса тела}$$

В этом случае импульс для абсолютно твердого тела можно рассчитать, как:

$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{p}_i = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \overline{\mathrm{v}}_i = \int \overline{\mathrm{v}} dm = \int \overline{\mathrm{v}} \rho dV = \int \rho \overline{\mathrm{v}} dV \; .$$

Либо, через центр масс:

$$\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.} \, ,$$

где $$\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.} = \frac{d\overline{r}_{ц.м.}}{dt}$$ – скорость центра масс.

$$\overline{r}_{ц.м.} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i \overline{r}_i}{m} = \frac{\int \rho \overline{r} dV}{m}$$ – координаты центра масс.

По координатам:

$$x_{ц.м.} = \frac{1}{m} \int \rho x dV$$

$$y_{ц.м.} = \frac{1}{m} \int \rho y dV$$

$$z_{ц.м.} = \frac{1}{m} \int \rho z dV$$

Т.о. ***II закон Ньютона*** *для абсолютно твердого тела* может быть сформулирован в том же виде, что и для системы материальных точек (см. две формулировки выше), где под импульсом и координатой центра масс тела понимаются приведенные здесь определения.

3.6.4. Основные выводы

Приведём основные выводы, которые можно по данному разделу. Отдельно отметим, что наши *утверждения справедливы*, как для *абсолютно твёрдого тела*, *произвольного тела* и для *механической системы* тоже.

1. II закон Ньютона для твёрдого тела или механической системы выглядит (внешне) точно так же, как и для материальной точки. Однако в данном случае (для твёрдого тела или механической системы) под импульсом надо понимать импульс твёрдого тела или механической системы, а под равнодействующей сил – равнодействующую лишь внешних сил, действующих на тело или систему.
   Для материальной точки:
$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}$$
   Для твёрдого тела или механической системы:
$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}_{Внешних}$$
2. Импульс твёрдого тела или механической системы по определению есть сумма импульсов всех материальных точек твёрдого тела или механической системы:
$$\overline{p} = \sum_{i=1}^{M} \overline{p}_i \ .$$
   Однако он также может быть рассчитан, как произведение массы всего тела или механической системы на скорость центра масс:
$$\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}}_{ц.м.}.$$
3. Для центра масс справедлива теорема о движении центра масс (повторим её ещё раз). *Центр масс (центр инерции) движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы (или всего тела), на которую действует сила, равная равнодействующая (векторной сумме) всех внешних сил, действующих на механическую систему или тело*. Однако, если речь идёт о представлении данного закона в виде формулы, то нам необходимо привести выражение для II закона Ньютона через массу и ускорение центра масс:
$$m\overline{a}_{ц.м.} = \overline{F}_{Внешних} \, .$$
4. В качестве определения центра масс мы можем использовать только лишь формулы для расчёта его координат
$$x_{ц.м.} = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_{ц.м.} = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_{ц.м.} = \frac{\sum m_i z_i}{m},$$
   или указывающего на него радиус-вектора.
$$\overline{r}_{ц.м.} = \frac{\sum_{i=1}^{M} m_i \overline{r}_i}{m} \ .$$

3.7. Моменты относительно центра

3.7.1. Момент силы

Df 1. ***Моментом силы*** (*относительно центра*) называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведённого из центра, на силу (момент силы относительно центра).

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F},$$

либо (3.25)

$$\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{F}\right]$$

Измеряется в *ньютонах, умноженных на метр*, $[H \cdot м] = [H][м] = \frac{[кг][м]^2}{[c]^2}$.

Df 2. ***Плечом силы*** называется кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (l_F - плечо силы).

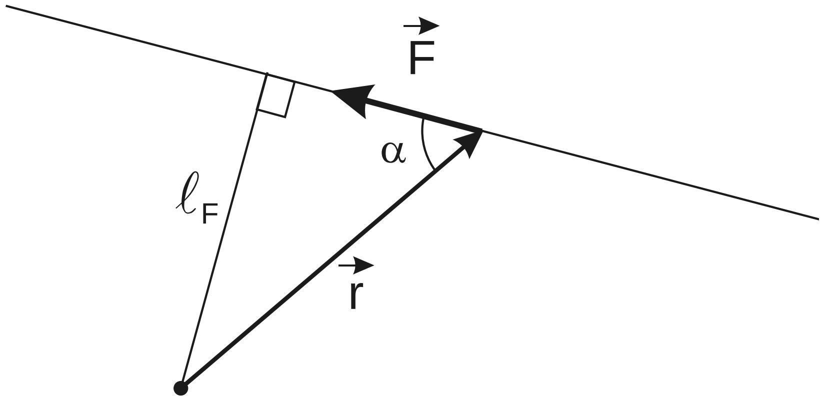


Рисунок 3.4
Плечо силы

Рассмотрим абсолютное значение момента силы:

$$M = \left|\bar{M}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot \underbrace{r \cdot \sin\alpha}_{l_F} = Fl_F.$$

Т.о. $M = Fl_F$ (*расчетная формула*). **Не путать с определением!!!**

По абсолютной величине *момент силы равен произведению силы на плечо этой силы.*

Замечание 1. В случае, если момент силы обеспечивает вращение вокруг некоторой оси, направление вектора момента силы совпадает с этой осью.

Замечание 2. Момент пары сил не зависит от выбора центра – если пара сил взаимно уравновешивают друг друга, но приложены к разным точкам тела, их равнодействующая равна нулю. Однако они будут создавать не равный нулю суммарный момент сил. Величина суммарного момента не зависит от выбора центра, относительно которого рассчитываются эти моменты:

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2 \Rightarrow \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = 0\,.$$

$$\overline{r}_{O-O'} = \overline{r}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{r}_1 = \overline{r}_0 + \overline{r}_1' \Rightarrow \overline{r}_1' = \overline{r}_1 - \overline{r}_0 \\ \overline{r}_2 = \overline{r}_0 + \overline{r}_2' \Rightarrow \overline{r}_2' = \overline{r}_2 - \overline{r}_0 \end{cases},$$

$$\overline{r}_1' \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2' \times \overline{F}_2 =$$

$$= \left(\overline{r}_1 - \overline{r}_0\right) \times \overline{F}_1 + \left(\overline{r}_2 - \overline{r}_0\right) \times \overline{F}_2 =$$

$$= \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 - \overline{r}_0 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 - \overline{r}_0 \times \overline{F}_2 =$$

$$= \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 - \overline{r}_0 \times \overline{F}_1 - \overline{r}_0 \times \overline{F}_2 =$$

$$= \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 - \overline{r}_0 \times \left(\underbrace{\overline{F}_1 + \overline{F}_2}_{0} \right) =$$

$$= \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2\,.$$

$$\forall (\cdot) O, (\cdot) O': \quad \sum_{i=1}^{N} \overline{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \overline{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{r}_i' \times \overline{F}_i$$

3.7.2. Момент импульса

Df 3. ***Моментом импульса*** *материальной точки* (*относительно центра*) называется векторное произведение радиус-вектора на импульс:

$$\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p},$$

либо (3.26)

$$\overline{L} = \left[\overline{r}, \overline{p}\right].$$

Df 4. ***Момент импульса*** *системы материальных точек* равен сумме моментов импульса всех материальных точек системы:

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{N} \overline{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{r}_i \times \overline{p}_i \cdot \qquad (3.27)$$

Измеряется в *килограммах, умноженных на метр в квадрате и деленных на секунду,* $\left[кг \cdot м^2/с\right] = \frac{[кг][м]^2}{[с]}$.

Момент импульса также можно выразить через плечо:

$$L = \left|\overline{L}\right| = r \cdot p \cdot \sin\left(\widehat{\overline{p}, \overline{r}}\right) = l_p \cdot p,$$

$$l_p = r \cdot \sin\left(\widehat{\overline{p}, \overline{r}}\right)$$

l_p – *плечо импульса*, т.е. кратчайшее расстояние от центра до линии, по которой направлен импульс до центра.

3.8. Основной закон динамики вращательного движения

Рассмотрим систему материальных точек (*как модель твердого тела*). Запишем II закон Ньютона в импульсной формулировке для всех точек системы.

$$\frac{d\overline{p}_1}{dt} = \overline{F}_1 + \sum_{j=2}^{N} \overline{F}_{1j}$$

$$\frac{d\overline{p}_2}{dt} = \overline{F}_2 + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq 2}}^{N} \overline{F}_{2j}$$

$$\ldots$$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = \overline{F}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \overline{F}_{ij}$$

$$\ldots$$

$$\frac{d\overline{p}_N}{dt} = \overline{F}_N + \sum_{j=1}^{N-1} F_{Nj}$$

Умножим векторно все уравнения на радиус-вектор слева. Каждое уравнение на радиус-вектор соответствующей точки.

$$\frac{d\left(\bar{r}_1 \times \bar{p}_1\right)}{dt} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 + \sum_{j=2}^{N} \bar{r}_1 \times \bar{F}_{1j}$$

$$\frac{d\left(\bar{r}_2 \times \bar{p}_2\right)}{dt} = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2 + \sum_{j=1}^{N} \bar{r}_2 \times \bar{F}_{2j}$$

...

$$\frac{d\left(\bar{r}_i \times \bar{p}_i\right)}{dt} = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}$$

...

$$\frac{d\left(\bar{r}_N \times \bar{p}_N\right)}{dt} = \bar{r}_N \times \bar{F}_N + \sum_{j=1}^{N-1} \bar{r}_N \times \bar{F}_{Nj}$$

Причём, заметим:

$$\bar{r}_i \times \bar{p}_i = \bar{L}_i$$

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_i$$

Просуммируем все уравнения:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \bar{M}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij},$$

и преобразуем: вынесем производную по времени за знак суммы, заменим сумму моментов импульса всех материальных точек на момент импульса всего тема, а сумму всех моментов внешних сил, действующих на отдельные материальные точки на суммарный момент внешних сил, действующих на тело:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \bar{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \bar{M}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}$$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}$$

Теперь докажем, что

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\overline{r}_i\times\overline{F}_{ij}=0$$

Доказательство:

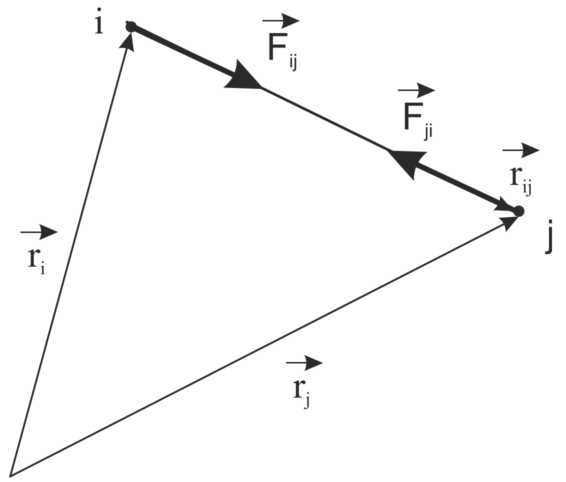


Рисунок 3.5

Уравновешивание моментов внутренних сил по III закону Ньютона

$$\overline{r}_{ij}=\overline{r}_j-\overline{r}_i$$

$$\overline{F}_{ij}=-\overline{F}_{ji}$$

$$\overline{r}_i\times\overline{F}_{ij}+\overline{r}_j\times\overline{F}_{ji}=\overline{r}_i\times\left(-\overline{F}_{ji}\right)+\overline{r}_j\times\overline{F}_{ji}=$$

$$=\left(\overline{r}_j-\overline{r}_i\right)\times\overline{F}_{ji}=\overline{r}_{ij}\times\overline{F}_{ji}=0,$$

т.к. $\overline{r}_{ij}\parallel\overline{F}_{ji}$

Что и требовалось доказать.

В итоге имеем *уравнение* ***II закона Ньютона*** *для вращательного движения* (*он же* ***уравнение моментов*** *и* ***основное уравнение динамики вращательного движения***):

$$\frac{d\overline{L}}{dt}=\overline{M}_{Внешних} \tag{3.28}$$

.

Скорость изменения момента импульса тела равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на тело.

3.9. Момент инерции относительно оси

Df 5.1. **Момент инерции** *материальной точки* (относительно оси) равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния до оси вращения.

$$I_i = m_i R_i^2 \tag{3.29}$$

Измеряется в *килограммах на метр в квадрате*, $[кг \cdot м^2] = [кг][м]^2$.

Df 5.2. **Момент инерции** *системы материальных точек* (относительно оси вращения) равен сумме моментов инерции всех материальных точек относительно этой оси.

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \tag{3.30}$$

Замечание 1 (Df.5.3). *Момент инерции твёрдого тела* может быть получен, как сумма моментов инерции всех его материальных точек.

Замечание 2. Момент силы и момент инерции импульса рассматривались нами относительно центра и были векторной величиной. Моменты силы и импульса относительно оси вращения будут проекциями этих векторов на ось вращения, и будет, таким образом, скалярами. Момент инерции рассмотрен нами относительно оси, а не относительно центра. Момент инерции относительно оси, так же, как и момент силы, относительно оси, является скаляром. Однако момент инерции относительно центра будет тензорной величиной, которая представляется в заданной системе координат 3×3 матрицей. О нём, возможно, мы поговорим ниже

Физический смысл.

По физическому смыслу момент инерции тела есть мера инертности тела при вращательном движении.

Момент инерции твёрдого тела.

Рассмотрим алгоритм вычисление момента инерции для твёрдого тела на примере стержня. (*Стержнем называется цилиндр, диаметром которого можно пренебречь*). Задача заключается в сведении процесса вычислений к базовому определению, то есть к определению момента инерции системы материальных точек. Необходимо *«найти у твердого тела все его материальные точки»*, а затем умудрится *«просуммировать все их моменты инерции»*.

Представим стержень как систему материальных точек, для этого разобьем его на элементарные части (на бесконечно малые кусочки). В общем случае (см. рассуждения выше) под элементарной частью мы понимает бесконечно малый объём. В данном случае, за элементарную часть можно принять бесконечно малый отрезок длины стержня (отрезок, длиной dx), т.к. сечение стержня, по определению, бесконечно мало.

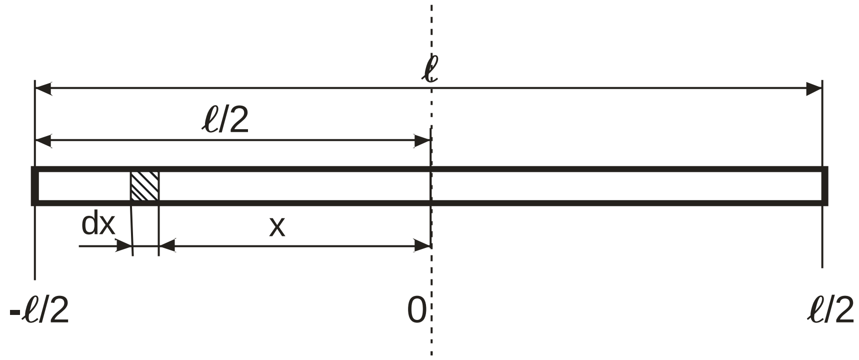


Рисунок 3.6
Момент инерции стержня

Стержень – цилиндр пренебрежимо малого диаметра. Следовательно, отрезок, длиной ***dx*** этого цилиндра можно считать материальной точкой. Масса этой элементарной части (*в выражении через плотность и объём*) будет равна:

$$dm_i = \rho dV_i = \rho \cdot \underbrace{Sdx_i}_{dV_i} = \rho Sdx_i \, .$$

Тогда элементарный момент инерции этого элементарного кусочка составит:

$$dI_i = dm_i \underbrace{x_i^2}_{R^2} = x_i^2 dm_i = x_i^2 \underbrace{\rho Sdx_i}_{dm} = \rho x_i^2 Sdx_i \, .$$

Разобьём наш стержень на *бесконечно большое количество* этих *элементарных кусочков*. Просуммировав их моменты инерции, получим момент инерции тела (стержня):

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \rho Sdx_i \, .$$

А теперь заметим, что данная сумма не что иное, как определение интеграла:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \rho Sdx_i = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho Sx^2 dx = \rho S \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx =$$

$$= \rho \cdot S \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho S \left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{l}{2}\right)^3}{3} \right) = \rho S \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) =$$

$$= \rho \cdot S \cdot \frac{l^3}{12} = \rho \cdot \underbrace{S \cdot l}_{V} \cdot \frac{l^2}{12} = \rho \cdot V \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{ml^2}{12} \, .$$

Бесконечно большая сумма бесконечно малых частей, коими являются элементарные части (или дифференциал длины ***dx***) с математической точностью превращается в интеграл, так как является совершенно честным определением *Римановой суммы*.

3.10. Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_{l_1} = I_l + ma^2 \quad (3.31)$$

Здесь $\boldsymbol{a}$ – расстояние между осями l и l_1. Причём, ось l_1 проходит через центр масс.

Доказательство:

Рассмотрим момент инерции относительно оси l_1:

$$I_{l_1} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_{l_1 i}^{\ 2}.$$

В плоскости, перпендикулярной осям l и l_1 вектор $\overline{R}_{il}$ может быть представлен, как сумма векторов

$$\overline{R}_{l_1 i} = \overline{R}_{li} + \overline{a}:$$

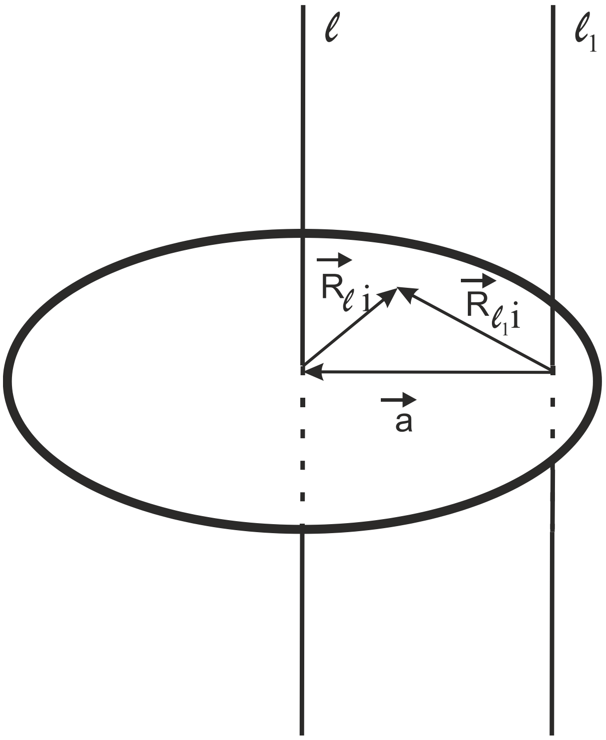


Рисунок 3.7
Теорема Штейнера

Но, тогда

$$R_{l_1 i}^{\ 2} = \overline{R}_{l_1 i}^{\ 2} = \overline{R}_{l_1 i} \cdot \overline{R}_{l_1 i} = \left(\overline{R}_{li} + \overline{a}\right)^2 = \overline{R}_{li}^{\ 2} + 2\overline{R}_{li} \cdot \overline{a} + \overline{a}^{\ 2}.$$

Подставляя в выражение для момента инерции, получаем

$$I_{l_1} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_{l_1 i}^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overline{R}_{li}^{\ 2} + 2\overline{R}_{li} \cdot \overline{a} + \overline{a}^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li}^{\ 2} + 2\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li} \cdot \overline{a} + \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{a}^2 =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i R_{li}^2}_{I_l} + 2\overline{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right)}_{m} \cdot a^2 =$$

$$= I_l + 2\overline{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li} + ma^2;$$

Рассмотрим второе слагаемое полученной суммы, а точнее, выражение $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li}$, которое получается из него следующим образом:

$$2\overline{a}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li} = 2\overline{a}\,\frac{m}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li} = 2\overline{a}m \cdot \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overline{R}_{li}.$$

И оставив в покое постоянный множитель $2\overline{a}m$. Покажем, что это выражение равно нулю (*равно нулевому вектору*):

Запишем данное выражение в координатном виде (представим его в виде системы 3-х уравнений, учитывая, что $\overline{R_{li}} = \left(x_i, y_i, 0\right)$ и что в системе координат, где за начало отсчёта взят центр масс, центр масс будет иметь нулевые координаты ☺ – $\left(x_{ц.м.}, y_{ц.м.}, z_{ц.м.}\right) = (0,0,0)$) :

$$\begin{cases} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{m} \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i y_i}{m} \\ \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{ц.м.} \\ y_{ц.м.} \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Первые две координаты (***x*** и ***y***) в системе координаты центра масс и в системе координат, где за начало отсчёта выбран центр масс, равны нулю. Третья координата (***z***) у вектора ***R*** равна нулю «по жизни» – это кратчайшее расстояние от точки до оси. Таким образом, и всё слагаемое будет равно нулю.

В итоге, утверждение доказано:

$$I_{l_1} = I_l + ma^2 .$$

Рассмотрим пример применения теоремы Штейнера. Ркассмотрим уже известный нам стержень и вычислим его момент инерции относительно оси, проходящий через его конец (*перпендикулярно самому стержню*):

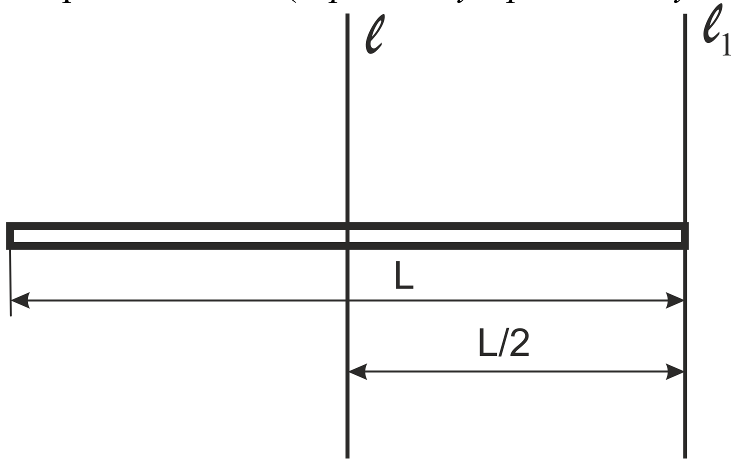


Рисунок 3.8

Теорема Штейнера для Стержня

Здесь ***a=L/2***, а $I_l = \dfrac{mL^2}{12}$. Тогда:

$$I_{l1} = I_l + ma^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} =$$

$$= \frac{mL^2}{12} + \frac{3mL^2}{3\cdot 4} = \frac{mL^2 + 3mL^2}{12} = \frac{4mL^2}{12} = \frac{mL^2}{3} .$$

3.11. Моменты относительно оси

3.11.1. Момент импульса относительно оси

(Выражение момента импульса через момент инерции)

Df 6. *Моментом импульса относительно оси* называется *проекция вектора момента импульса на эту ось*.

Очень часто под моментом импульса относительно оси понимается его *выражение через момент инерции* относительно этой оси и *угловое ускорение*:

$$L_l = I_l \omega$$

Упрощённый вариант доказательства.

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг оси l. Точка вращается вокруг оси, при этом все вектора (*момент импульса, момент силы, угловая скорость и ускорение*) направлены параллельно этой оси (*точнее, вдоль оси*).

Вид сверху – ось вращения l проходит перпендикулярно плоскости чертежа через центр окружности:

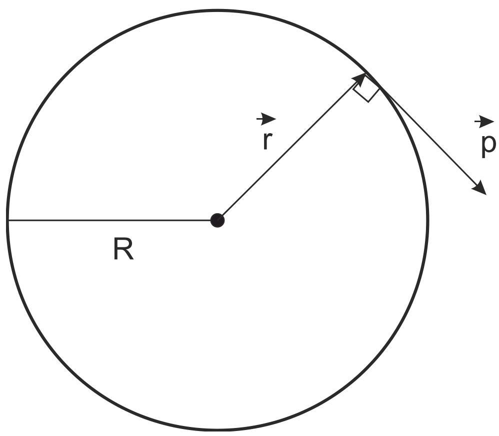


Рисунок 3.9

Проекция момента импульса на ось вращения

При этом учтём, что (как видно из чертежа):

1. $R = |\overline{r}| = r$,
2. $\overline{r} \perp \overline{p} \Rightarrow \sin(\overline{p}, \hat{\overline{r}}) = 1$

Тогда:

$$L_{l_i} = L_i = |\overline{r}_i \times \overline{p}_i| = r_i \cdot p_i \cdot \sin\left(\overline{p}, \hat{\overline{r}}\right) = R_i \cdot p_i =$$

$$= R_i \cdot m_i \cdot \mathrm{v}_i = R_i \cdot m_i \cdot R_i \omega = \underbrace{m_i R_i^2}_{I_i} \cdot \omega = I_i \omega \; .$$

Здесь мы так же учли, что:

$$p_i = m_i \mathrm{v}_i \,,$$

$$\mathrm{v}_i = R_i \omega \,.$$

Просуммируем по всем точкам:

$$L = \sum_{i=1}^{N} L_i = \sum_{i=1}^{N} I_i \omega = I \omega \,,$$

$$L_l = I_l \omega \,. \qquad (3.32)$$

Полный вариант, доказательство общего выражения.

Рассмотрим вращение тела относительно оси l и рассмотрим проекцию момента импульса на эту ось. Учтём, что векторное произведение векторов перпендикулярно плоскости, в которой лежат эти вектора и, следовательно:

$$\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p} \Rightarrow \overline{L} \perp \overline{p} \,.$$

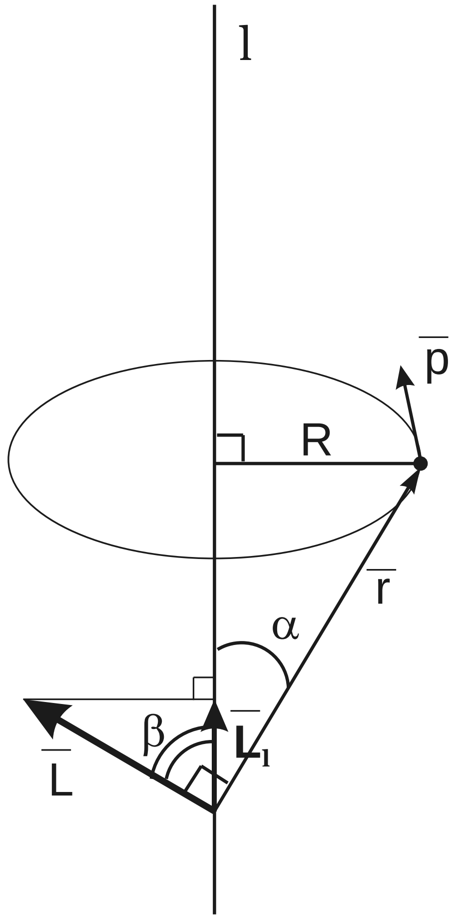


Рисунок 3.10

Проекция момента импульса – общий случай

Тогда:

$$L_{li} = L_i \cos\beta = L_i \sin\alpha = p_i r_i \sin(\pi/2) \sin\alpha = p_i \underbrace{r_i \sin\alpha}_{R_i} =$$

$$= p_i R_i = m_i \text{v}_i \cdot R_i = m_i \omega_i R_i \cdot R_i = m_i \omega_i R_i^2 = \underbrace{m_i R_i^2}_{I_i} \omega_i = I_i \omega_i .$$

Просуммируем проекции на ось вращения по всем точкам:

$$L_l = \sum_{i=1}^{N} L_{li} = \sum_{i=1}^{N} I_i \omega = I_l \omega .$$

Если предположить, что тело, на самом деле, вращается вокруг этой оси, то и суммарный момент импульса (*момент импульса всего тела*) будет направлен вдоль этой оси. Это предположение наверняка верно, если вдоль этой оси направлен суммарный момент внешних сил (*см. II з-н Ньютона для вращательного движения:* $d\bar{L}/dt \parallel \bar{M},\, \bar{L}_0 = 0 \Rightarrow \bar{L} = \Delta\bar{L} \parallel \bar{M}$) – тело закреплено на оси, и момент сил раскручивает его вокруг этой оси. Тогда абсолютная величина момента импульса всего тела будет равно сумме проекций моментов импульса всех материальных точек тела на эту ось:

$$L = L_l = I\omega$$

Мы получили *выражение* ***проекции момента импульса*** *на ось вращения через* ***момент инерции*** *и* ***угловую скорость***:

$$L_l = I_l \omega$$

Момент импульса относительно оси равен произведению момента инерции относительно этой оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси. **Не путать с определением *момента импульса относительно оси* (*см. выше*)!!!**

Замечание. *Это выражение е*сть ***выражение*** *для* ***момента импульса через момент инерции*** и ***угловое ускорение***, *оно же –* ***проекция момента импульса на ось вращения***. *В таком виде выражение справедливо только для проекции на ось!!!*

3.11.2. Момент силы относительно оси

<u>Df 7.</u> Моментом силы относительно оси *называется проекция момента силы на эту ось:*

$$M_l = M\cos\beta ,$$

$$M_Z = M\cos\beta \text{ (см. Рисунок 2.13).}$$

Именно эта величина будет вызывать вращение тело вокруг оси, на которой оно закреплено.

Численно проекция момента силы на ось будет равна проекции силы на плоскость (*плоскость* ***XY***), перпендикулярную оси вращения на плечо силы относительно оси – кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow M_l = F_{XY} R_l ,$$

либо моменту проекции силы на плоскость ***XY*** относительно цента – точки пересечения оси с плоскостью ***XY*** (*что тоже самое*).

В отличии от момента импульса, никаких особых соотношений для момента силы под этим термином не понимается.

Ниже приводятся рассуждения, подтверждающие данное утверждение:

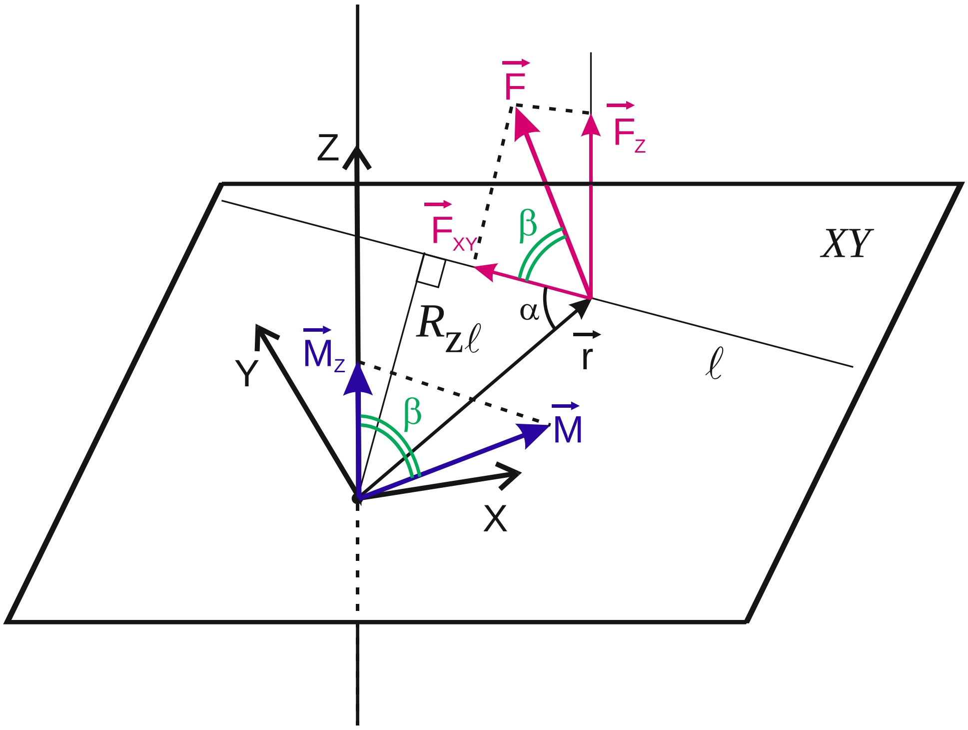


Рисунок 3.11
Проекция момента импульса на ось вращения

$$\bar{F} = \bar{F}_{XY} + \bar{F}_Z \Rightarrow \bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \left(\bar{F}_{XY} + \bar{F}_Z \right) =$$

$$= \bar{r} \times \bar{F}_{XY} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{F}_Z}_{0\left(\bar{F}_Z \| l\right)} = \bar{r} \times \bar{F}_{XY},$$

$$M_Z = \left| \bar{r} \times \bar{F}_{XY} \right| = F_{XY} \underbrace{r \sin \alpha}_{R_{Z\,l}} = F_{XY} R_{Z\,l}.$$

При этом:

$$F_{XY} = F \cos \beta \Rightarrow M_Z = F\ R_{Z\,l} \cos \beta$$

Отдельно отметим, что угол между вектором момента силы $\bar{M}$ и осью ***Z*** (*проекция момента на ось* ***Z***) и угол между вектором силы $\bar{F}$ и плоскостью ***XY*** (*проекция силы на плоскость* ***XY***) – один и тот же угол $\boldsymbol{\beta}$. Это вытекает из рассуждений фактов:

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} \Rightarrow \bar{M} \perp \bar{F},$$

$$Z \perp XY.$$

Проекция момент силы на ось будет равна нулю в двух случаях – если сила параллельна оси или же если пересекает ось (*нулю равно плечо силы*).

3.12. Выражение основного закона динамики вращательного движения через угловое ускорение

Рассмотрим II закон Ньютона для вращательного движения:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M},$$

Сначала рассмотрим проекцию векторов на ось вращения (*в случае вращения тела вокруг жестко закреплённой оси все рассматриваемые вектора параллельны этой оси*):

$$\frac{dL_l}{dt} = M_l$$

Подставим в него полученное выше выражение:

$$L_l = I_l \omega,$$

получим:

$$\frac{d\left(I_l \omega\right)}{dt} = M_l.$$

Будем считать момент инерции константой, и выносим его за знак дифференцирования:

$$I_l \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\varepsilon} = M_l$$

В итоге имеем выражение основного уравнения вращательного движения (*II з-на Ньютона для вращательного движения*) через момент инерции и угловое ускорение:

$$I_l \varepsilon = M_l. \qquad (3.33)$$

В векторном виде данное уравнение тоже будет верно, только в матричном виде (*эта информация носит справочный характер*)

$$I\bar{\varepsilon} = \bar{M}. \qquad (3.34)$$

Здесь

$$I = \begin{pmatrix} \sum\limits_k m_k\left(r_{yk}^2 + r_{zk}^2\right) & -\sum\limits_k m_k r_{xk} r_{yk} & -\sum\limits_k m_k r_{xk} r_{zk} \\ -\sum\limits_k m_k r_{yk} r_{xk} & \sum\limits_k m_k\left(r_{xk}^2 + r_{zk}^2\right) & -\sum\limits_k m_k r_{yk} r_{zk} \\ -\sum\limits_k m_k r_{zk} r_{xk} & -\sum\limits_k m_k r_{zk} r_{yk} & \sum\limits_k m_k\left(r_{xk}^2 + r_{yk}^2\right) \end{pmatrix} \qquad (3.35)$$

Здесь и ниже $r_{xk} = r_{1k} = x$, $r_{yk} = r_{2k} = y$, $r_{zk} = r_{3k} = z$ – координаты радиус-вектора $\overline{r_k}$, проведённого из цента к $\boldsymbol{k}$-ой материальной точки.

Величина $\boldsymbol{I}$ называется ***тензором момента инерции***.

⇒ дальше можно пропустить…

Это *симметричный тензор* (если поменять местами строчки и столбцы вид его не изменится). В математике доказывается, что такие тензоры *можно привести к диагональному виду* путём преобразования координат. Тогда он примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sum_k m_k \left(\underbrace{r_{yk}^2 + r_{zk}^2}_{R_{Xk}^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_k m_k \left(\underbrace{r_{xk}^2 + r_{zk}^2}_{R_{Yk}^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_k m_k \left(\underbrace{r_{xk}^2 + r_{yk}^2}_{R_{Zk}^2} \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k m_k R_{Xk}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_k m_k R_{Yk}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_k m_k R_{Zk}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_X & 0 & 0 \\ 0 & I_Y & 0 \\ 0 & 0 & I_Z \end{pmatrix},$$

$$I_X = \sum_k m_k R_{Xk}^2, \quad I_Y = \sum_k m_k R_{Yk}^2, \quad I_Z = \sum_k m_k R_{Zk}^2 .$$

Эти оси координат (X, Y, Z) и эти моменты инерции (I_X, I_Y, I_Z) называются ***главными***. Для симметричных тел одинаковой плотности главными осями для момента инерции являются оси симметрии тела, а моменты инерции называются так: один *полярный* и два *экваториальных*.

****Далее идёт изложение материала повышенной математической сложности для любознательных.***

Можно привести и ещё одно представление для *тензора момента инерции*. Обычно тензоры представляют не в виде матрицы, а в виде члена общего виде с произвольными индексами ***i*** и ***j***. Это связано с тем, что индексов у тензора в общем случае может быть не два, а больше. Представление его в виде таблички в тогда просто невозможно.

Выглядит это для тензора момента импульса должно примерно так:

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = I_{ij}\,.$$

Произведём некоторые преобразования. Сначала рассмотрим выражение для вычисления квадрата длины вектора $\overline{r}$ через его координаты и выведем из него три весьма любопытных соотношения:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \Rightarrow$$

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 - r_3^2 = r^2 - r_3 r_3\,,$$

$$r_1^2 + r_3^2 = r^2 - r_2^2 = r^2 - r_2 r_2\,,$$

$$r_2^2 + r_3^2 = r^2 - r_1^2 = r^2 - r_1 r_1\,.$$

Далее рассмотрим выражение для *тензора момента инерции твёрдого тела* и заменим в нем в соответствии с полученными соотношениями диагональные элементы матрицы:

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_k^2 - r_{1k}r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_k^2 - r_{2k}r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_k^2 - r_{3k}r_{3k}\right) \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, здесь диагональные элементы матрицы отличаются по виду от недиагональных только наличием в них *квадрата длины радиус-вектора* $\overline{r}$.

И наконец разберём интересную формулу. Сначала введём новый термин.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Величины δ_{ij} называются ***символами Кронекера***. Тогда с их помощью *тензор момента инерции* можно записать следующем образом:

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{M} \Big(m_k \left(\delta_{ij} r_k^2 - r_{ik} r_{jk} \right) \Big). \tag{3.36}$$

Здесь мы убрали с помощью символов Кронекера квадрат длины вектора $\overline{r}$ у всех элементов, кроме тех, где совпадают значения индексов ***i*** и ***j*** (то есть, кроме диагональных элементов).

Рассмотрим ***вывод*** выражения для *тензора момента инерции* – формула (3.35). Получать это выражение будем, пытаясь привести выражение для момента импульса (в координатной форме) к виду:

$$\overline{L} = I\overline{\omega}.$$

Для этого возьмём определение момента импульса для ***k***-ой материальной точки:

$$\overline{L}_k = \overline{r}_k \times \overline{p}_k.$$

И подставим в него выражение импульса (по определению) и выражение вектора скорости через вектор угловой скорости:

$$\overline{p} = m\overline{\mathrm{v}},$$

$$\overline{\mathrm{v}} = \overline{\omega} \times \overline{r},$$

$$\left(\forall k : \overline{\omega}_k = \overline{\omega} \right).$$

Получим:

$$\overline{L}_k = \overline{r}_k \times \overline{p}_k = \overline{r}_k \times \left(m_k \overline{\mathrm{v}}_k \right) = \overline{r}_k \times \Big(m_k \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_k \right) \Big) = m_k \left(\overline{r}_k \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_k \right) \right).$$

Чтобы не загромождать ввод переменной, отвечающей массе материальной точки $\left(m_k \right)$, разберём отдельно выражение без неё:

$$\overline{r}_k \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_k \right).$$

При этом мы дважды раскроем векторные произведения, расписав их через определитель матрицы

$$\overline{r}_k \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_k \right) = \overline{r}_k \times \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ r_{1k} & r_{2k} & r_{3k} \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{r}_k \times \Big(\left(\omega_2 r_{3k} - \omega_3 r_{2k} \right) \overline{e}_1 - \left(\omega_1 r_{3k} - \omega_3 r_{1k} \right) \overline{e}_2 + \left(\omega_1 r_{2k} - \omega_2 r_{1k} \right) \overline{e}_3 \Big) =$$

$$=\begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ r_{1k} & r_{2k} & r_{3k} \\ \omega_2 r_{3k}-\omega_3 r_{2k} & \omega_3 r_{1k}-\omega_1 r_{3k} & \omega_1 r_{2k}-\omega_2 r_{1k} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(r_{2k}\left(\omega_1 r_{2k}-\omega_2 r_{1k}\right)-r_{3k}\left(\omega_3 r_{1k}-\omega_1 r_{3k}\right)\right)\overline{e}_1-$$

$$-\left(r_{1k}\left(\omega_1 r_{2k}-\omega_2 r_{1k}\right)-r_{3k}\left(\omega_2 r_{3k}-\omega_3 r_{2k}\right)\right)\overline{e}_2+$$

$$+\left(r_{1k}\left(\omega_3 r_{1k}-\omega_1 r_{2k}\right)-r_{2k}\left(\omega_2 r_{3k}-\omega_3 r_{2k}\right)\right)\overline{e}_3=$$

и сгруппируем у каждого из орт осей $\overline{e}_i$ комбинации координат радиус-вектора $\overline{r}$, как коэффициенты перед соответствующей координатой вектора угловой скорости $\overline{\omega}$:

$$=\left(\left(r_{2k}r_{2k}+r_{3k}r_{3k}\right)\omega_1+\left(-r_{1k}r_{2k}\right)\omega_2+\left(-r_{1k}r_{3k}\right)\omega_3\right)\overline{e}_1+$$

$$+\left(\left(-r_{1k}r_{2k}\right)\omega_1+\left(r_{1k}r_{1k}+r_{3k}r_{3k}\right)\omega_2+\left(-r_{2k}r_{3k}\right)\omega_3\right)\overline{e}_2+$$

$$+\left(\left(-r_{1k}r_{3k}\right)\omega_1+\left(-r_{2k}r_{3k}\right)\omega_2+\left(r_{1k}r_{1k}+r_{2k}r_{2k}\right)\omega_3\right)\overline{e}_3=$$

$$=\left(\left(r_{2k}^2+r_{3k}^2\right)\omega_1+\left(-r_{1k}r_{2k}\right)\omega_2+\left(-r_{1k}r_{3k}\right)\omega_3\right)\overline{e}_1+$$

$$+\left(\left(-r_{1k}r_{2k}\right)\omega_1+\left(r_{1k}^2+r_{3k}^2\right)\omega_2+\left(-r_{2k}r_{3k}\right)\omega_3\right)\overline{e}_2+$$

$$+\left(\left(-r_{1k}r_{3k}\right)\omega_1+\left(-r_{2k}r_{3k}\right)\omega_2+\left(r_{1k}^2+r_{2k}^2\right)\omega_3\right)\overline{e}_3=$$

Полученное выражение можно представить в виде матрицы (тензора):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \end{array} \\ =\begin{pmatrix} r_{2k}^2+r_{3k}^2 & -r_{1k}r_{2k} & -r_{1k}r_{3k} \\ -r_{2k}r_{1k} & r_{1k}^2+r_{3k}^2 & -r_{2k}r_{3k} \\ -r_{3k}r_{1k} & -r_{3k}r_{2k} & r_{1k}^2+r_{2k}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}= \end{array}$$

$$=\begin{pmatrix} r_{2k}^2+r_{3k}^2 & -r_{1k}r_{2k} & -r_{1k}r_{3k} \\ -r_{2k}r_{1k} & r_{1k}^2+r_{3k}^2 & -r_{2k}r_{3k} \\ -r_{3k}r_{1k} & -r_{3k}r_{2k} & r_{1k}^2+r_{2k}^2 \end{pmatrix}\overline{\omega}.$$

Тогда *момент импульса* ***k***-ой материальной точки $\overline{L}_k$ можно записать:

$$\overline{L}_k=m_k\begin{pmatrix} r_{2k}^2+r_{3k}^2 & -r_{1k}r_{2k} & -r_{1k}r_{3k} \\ -r_{2k}r_{1k} & r_{1k}^2+r_{3k}^2 & -r_{2k}r_{3k} \\ -r_{3k}r_{1k} & -r_{3k}r_{2k} & r_{1k}^2+r_{2k}^2 \end{pmatrix}\overline{\omega}=$$

$$
= \begin{pmatrix} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix} \bar{\omega} =
$$

$$
= I_k \ \bar{\omega},
$$

где

$$
I_k = \begin{pmatrix} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix}
$$

– ***момент инерции k***-ой материальной точки.

По определению *момент импульса системы материальных точек* равен векторной сумме *моментов инерции всех точек системы*:

$$
\bar{L} = \sum_{k=1}^{M} \bar{L}_k = \sum_{k=1}^{M} \left(I_k \ \bar{\omega}\right) = \left(\sum_{k=1}^{M} I_k\right) \bar{\omega} = I \bar{\omega},
$$

где

$$
I = \sum_{k=1}^{M} I_k = \sum_{k=1}^{M} \begin{pmatrix} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix}
$$

– тензор момента инерции тела (как системы материальных точек).

Немного преобразуем его

$$
I = \sum_{k=1}^{M} \begin{pmatrix} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix}.
$$

В итоге мы получили выражение для тензора момента инерции (что и требовалось доказать!):

$$I=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}^2+r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{1k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2+r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k}r_{2k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2+r_{2k}^2\right) \end{pmatrix}.$$

Ещё один *вариант вывода* можно привести, используя формулу для вычисления двойного векторного произведения:

$$\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=\left(\overline{a}\cdot\overline{c}\right)\overline{b}-\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)\overline{c}.$$

Тогда рассмеивавшаяся нами формула примет вид:

$$\overline{r}_k\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}_k\right)=r_k^2\overline{\omega}-\left(\overline{r}_k\cdot\overline{\omega}\right)\overline{r}_k.$$

Разберём отдельно первый и второй член разности:

$$r_k^2\overline{\omega}=\begin{pmatrix} r_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

$$\left(\overline{r}_k\cdot\overline{\omega}\right)\overline{r}_k=\left(r_{1k}\omega_1+r_{2k}\omega_2+r_{3k}\omega_3\right)\overline{r}_k=$$

$$=\begin{pmatrix} r_{1k}\omega_1 & r_{2k}\omega_2 & r_{3k}\omega_3 \\ r_{1k}\omega_1 & r_{2k}\omega_2 & r_{3k}\omega_3 \\ r_{1k}\omega_1 & r_{2k}\omega_2 & r_{3k}\omega_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{1k} \\ r_{2k} \\ r_{3k} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} r_{1k}\omega_1 r_{1k} & r_{2k}\omega_2 r_{1k} & r_{3k}\omega_3 r_{1k} \\ r_{1k}\omega_1 r_{2k} & r_{2k}\omega_2 r_{2k} & r_{3k}\omega_3 r_{2k} \\ r_{1k}\omega_1 r_{3k} & r_{2k}\omega_2 r_{3k} & r_{3k}\omega_3 r_{3k} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} r_{1k}r_{1k} & r_{1k}r_{2k} & r_{1k}r_{3k} \\ r_{2k}r_{1k} & r_{2k}r_{2k} & r_{2k}r_{3k} \\ r_{3k}r_{1k} & r_{3k}r_{2k} & r_{3k}r_{3k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

В целом получим:

$$\bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = r_k^2 \bar{\omega} - (\bar{r}_k \cdot \bar{\omega}) \bar{r}_k =$$

$$= \begin{pmatrix} r_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{1k} r_{1k} & r_{1k} r_{2k} & r_{1k} r_{3k} \\ r_{2k} r_{1k} & r_{2k} r_{2k} & r_{2k} r_{3k} \\ r_{3k} r_{1k} & r_{3k} r_{2k} & r_{3k} r_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} r_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_k^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{1k} r_{1k} & r_{1k} r_{2k} & r_{1k} r_{3k} \\ r_{2k} r_{1k} & r_{2k} r_{2k} & r_{2k} r_{3k} \\ r_{3k} r_{1k} & r_{3k} r_{2k} & r_{3k} r_{3k} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_k^2 - r_{1k} r_{1k} & -r_{1k} r_{2k} & -r_{1k} r_{3k} \\ -r_{2k} r_{1k} & r_k^2 - r_{2k} r_{2k} & -r_{2k} r_{3k} \\ -r_{3k} r_{1k} & -r_{3k} r_{2k} & r_k^2 - r_{3k} r_{3k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \delta_{ij} r_k^2 - r_{ik} r_{jk} .$$

Причём в этом случае легко заметить, как выразить формулу через символы Кронекера (что, собственно говоря, мы и сделали).

⇐ *можно пропустить досюда*…

3.13. Основные выводы по динамике вращательного движения

1. Основной закон динамики вращательного движения (II закон Ньютона для вращательного движения) *в импульсной формулировке* выглядит следующем образом:
   – в векторной форме:
   $$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} ,$$
   – проекция на ось вращения (в скалярной форме):
   $$\frac{dL_l}{dt} = M_l .$$
   Этот закон также называется ***уравнение моментов***.
2. Основной закон динамики вращательного движения (II закон Ньютона для вращательного движения) *в выражении через ускорение*:
   – в виде проекции на ось вращения (в скалярной форме):
   $$I_l \varepsilon = M_l ,$$
   – в векторной форме:
   $$I \bar{\varepsilon} = \bar{M} .$$

3. И тот и другой закон можно рассмотрен, как в векторной форме, так и в виде проекции на ось вращения. В том случае, когда мы имеем дело с вращением тела вокруг жестко закреплённой оси, различие этих формулировок чисто формальное – ставить сверху над величинами значок вектора либо же указывать знак проекции.

   В том случае, когда мы говорим о свободном движении тела и как токовая ось вращения на определена, надо помнить, что момент инерции (относительно центра, а не относительно оси) превращается в тензорную величину.

4. Не следует путать, данные выражения являются промежуточными преобразованиями, а не очередными выражениями основного закона динамики вращательного движения:

$$\frac{d\left(I_l\omega\right)}{dt}=M_l,\ I_l\frac{d\omega}{dt}=M_l\ .$$

   Не следует приводить их в списке формулировок этого закона!

5. Момент силы в своём основном определении есть *векторная величина* и определяется *относительно центра* (векторное произведение радиус-вектора из центра к точке приложения силы на вектор силы):

$$\overline{M}=\overline{r}\times\overline{F}\ .$$

   Момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно центра на эту ось:

$$M_l=\left|\overline{M}\right|\cos\beta\ .$$

   Понятие «*плечо силы*», как кратчайшего расстояния от центра до линии действия силы, возникает в тот момент, когда мы начинаем вычислять абсолютное значение момента силы и раскрываем векторное произведение. В этом случае абсолютное значение момента силы – есть произведение силы (её абсолютной величины) на плечо силы:

$$M=\left|\overline{M}\right|=F\,l_F\ .$$

6. Момент импульса относительно центра для материальной точки по определению есть векторное произведение радиус-вектора, проведённого из центра к данной материальной точке на импульс этой материальной точки:

$$\overline{L}=\overline{r}\times\overline{p}\ .$$

   Для системы материальных точек (механической системы или твёрдого тела) момент импульса по определению есть сумма моментов импульса всех материальных точек системы:

$$\overline{L}=\sum_{i=1}^{N}\overline{L}_i=\sum_{i=1}^{N}\overline{r}_i\times\overline{p}_i\ .$$

Под *моментом импульса относительно оси* понимается *проекция вектора момента импульса на эту ось:*

$$L_l = \left|\bar{L}\right| \cos\beta .$$

Для момента импульса относительно справедливо *выражение проекции момента импульса через момент инерции относительно данной оси и угловую скорость*:

$$L_l = I_l \omega .$$

Отдельно напомним, что данное соотношение может быть записано и для векторов:

$$\bar{L} = I\,\bar{\omega} .$$

Но в этом случае под моментом инерции мы понимаем момент инерции относительно центра, являющейся тензором (в нашем пространстве задаётся 3x3 матрицей):

$$I = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k} r_{2k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k} r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k} r_{1k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{3k}^2\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{2k} r_{3k}\right) \\ -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k} r_{1k}\right) & -\sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{3k} r_{2k}\right) & \sum\limits_{k=1}^{M} m_k\left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2\right) \end{pmatrix}.$$

3.14. Подобие законов механики поступательного и вращательного движения

Таблица 3.2

Основные формулы для поступательного и вращательного движения

Поступательное	**Вращательное**
$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{\mathrm{v}}_0 t + \frac{\bar{a}t^2}{2}$ $S = S_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}_0 + \bar{a}t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$m\bar{a} = \bar{F}$	$I\varepsilon = M$
$\frac{d\,\bar{p}}{dt} = \bar{F}$	$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}$

4. Работа, энергия

4.1. Работа. Мощность

<u>Df 1</u>. Элементарная работа – скалярное произведение силы на элементарное перемещение.

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} \tag{4.1}$$

Измеряется в *джоулях*, $[Дж] = [H][м] = \frac{[кг][м]^2}{[c]^2}$. Международное обозначение $[J]$.

<u>Df 2</u>. Работа – криволинейный интеграл от элементарной работы:

$$A = \int_L dA = \int_L \bar{F} \cdot d\bar{r} \tag{4.2}$$

Вообще говоря, выражение (4.2) может быть сведён к *криволинейному интегралу* как *I рода*, так и *II рода*. Однако, рассматривать работу как криволинейный интеграл II рода логично для полей сил и, в частности, для консервативных полей сил (см. ниже). В общем же случае (в частности, для диссипативных мил – сил трения и сопротивления, но и для полей сил) – это *криволинейному интегралу I рода*.

Прежде, ем говорить об интеграле, ещё пару слов об *элементарной работе*. Вычисляя значение скалярного произведения, получим:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F\, dr \cos\alpha, \quad \alpha = \left(\bar{F}, d\bar{r}\right).$$

Дале, учитывая, что

$$\left|d\bar{r}\right| = dr = dS,$$

Получим:

$$dA = F \cos\alpha\, dS\ . \tag{4.3}$$

Это есть выражение работы через элементарное перемещение. Угол α, при желании, здесь можно считать углом между силой и касательной к траектории.

Теперь выразим элементарную работу через скорость и время. Учтём, что:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v}\, dt \Rightarrow$$

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot \bar{v}\, dt\ .$$

В итоге, выражение для *элементарной работы* через *элементарный промежуток времени* будет выглядеть так:

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{v}\, dt\ . \tag{4.4}$$

Если записать *силу* и *элементарное перемещение* в виде разложения по базису в декартовой системе координат:

$$\bar{F} = F_x \,\bar{i} + F_y \,\bar{j} + F_z \,\bar{k} \;,$$

$$d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k} \;,$$

то, подставив эти выражения в определение элементарной работы и произведя вычисление скалярного произведения, получим:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x \,dx + F_y \,dy + F_z \,dz \,.$$

Полученное выражение для работы выглядит так:

$$dA = F_x \,dx + F_y \,dy + F_z \,dz \,. \qquad (4.5)$$

⇒ ***дальше можно пропустить*…**

Это есть представление работы в виде *дифференциальной формы*.

Замечание 1. Не стоит путать *дифференциальную форму* и *полный дифференциал*, с которым мы уже знакомы. Любой полный дифференциал есть дифференциальная форма. Но не любая дифференциальная форма будет являться полным дифференциалом. Но об этом, возможно, ниже.

Замечание 2. Пару слов о дифференциальных формах (*для любознательных…*). *Дифференциальной формой* называется многочлен вида:

форма *1-ого порядка*:

$$\omega = X\left(x,y,z\right)dx + Y\left(x,y,z\right)dy + Z\left(x,y,z\right)dz \,,$$

либо для произвольной *k-формы* в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(x^1,\ldots,x^n\right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots dx^{i_k} \;,$$

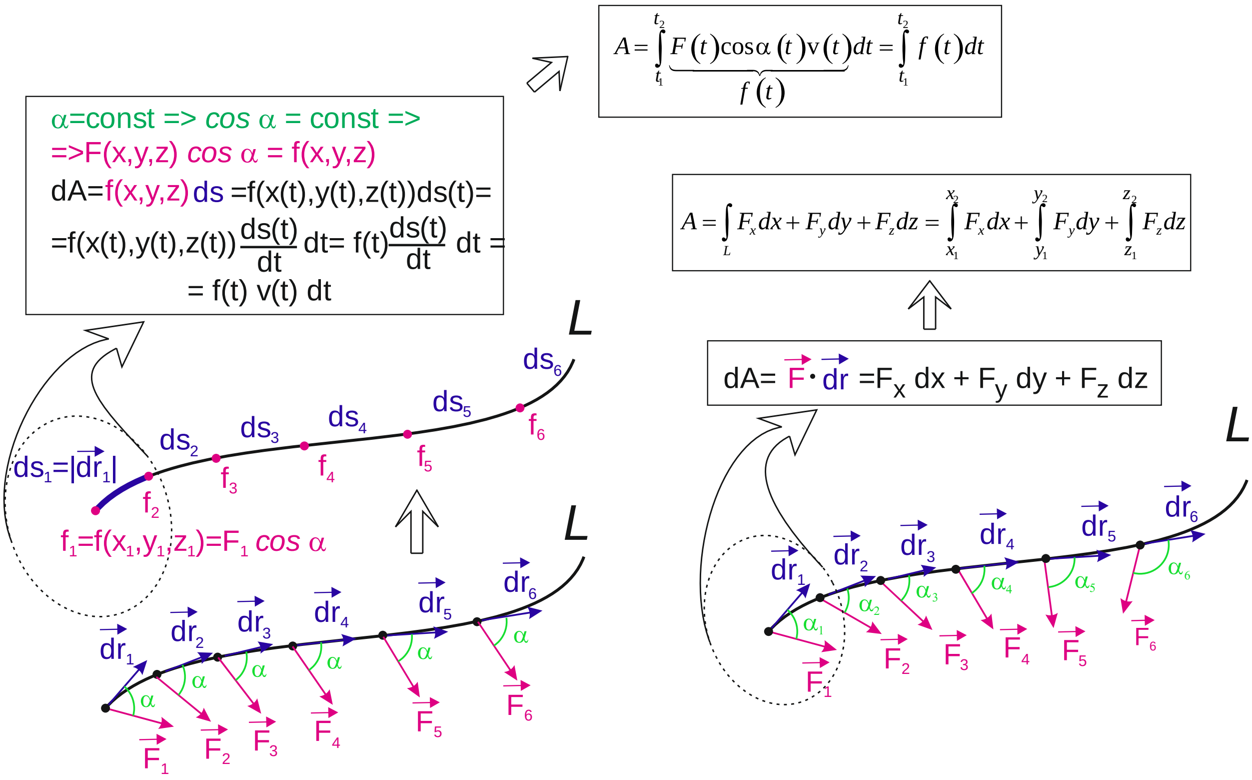
где

x^i – *i-ая* координата,

dx^i – дифференциал (*внешний дифференциал*) *i-ой* координаты,

$dx^i \wedge dx^j$ – *внешнее произведение* (внешнее – результат этого произведения лежит не в $\mathbb{R}^n$, а в $\mathbb{R}^{n \cdot n}$) дифференциалов *i-ой* и *j-ой* координат.

Мы уже говорили о таких объектах, как тензоры. Тензор (*первого порядка*) в конкретных координатах представляется квадратной таблицей – матрицей. Для более сложных объектов (тензоров высших порядков) этом могут быть кубические и т.д. матрицы (таблицы). Дифференциальная форма – есть альтернативный способ представления подобных объектов *в виде многочленов*.



Криволинейный интеграл I рода
(интеграл по длине кривой)

Криволинейный интеграл II рода
(интеграл по дифференциальной форме)

Рисунок 4.1

Работа силы, как криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл I рода – интеграл от скалярной функции *по длине кривой*.

Мы просто рассчитываем значение функции в точках кривой, переменная интегрирования – длина пути ***s***:

$$\int_L f\,ds=\int_{s(t_1)}^{s(t_1)} f(x,y,z)\,ds\,.$$

Если можно параметризировать функцию длиной пути:

$$f(x,y,z)\to f(s)\Rightarrow\int_L f\,ds=\int_{s(t_1)}^{s(t_1)} f(s)\,ds\,.$$

При параметризации временем:

$$s=s(t)\Rightarrow ds=\frac{ds}{dt}dt\,,\ \int_L f\,ds=\int_{s(t_1)}^{s(t_1)} f(t)\frac{ds}{dt}dt\,.$$

При задании кривой, как *y=y(x)*:

$$y=y(x)\Rightarrow ds=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx\,,$$

$$\int_L f\,ds=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx\,.$$

Криволинейный интеграл II рода – *интеграл по дифференциальной форме*.

Для дифференциальной формы

$$X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz$$

запишем интеграл, где переменные надо выразить через параметр интегрирования:

$$\int_L X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz=$$

либо $$=\int_{t_1}^{t_2} X(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} Y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} Z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}dt\,,$$

либо $$=\int_{x_1}^{x_2} X(x,y(x),z(x))+$$

$$+X(x,y(x),z(x))+Y(x,y(x),z(x))dx\,.$$

либо $$=\int_{x_1}^{x_2} X(x,y(x),z(x))dx+$$

$$+\int_{y^1}^{y_2} X(x(y),y,z(y))dy+\int_{z_1}^{z_1} Y(x(z),y(z),z)dz\ \ldots$$

⇐ *можно пропустить досюда*…

Замечание 3. В случае, если на материальную точку действует несколько сил, работа равнодействующей этих сил будет равна сумме работ всех сил, действующих на материальную точку:

$$A = \int\limits_L \bar{F}_{Равн.} \cdot d\bar{r} = \int\limits_L \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot d\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int\limits_L \bar{F}_i \cdot d\bar{r}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} A_i \qquad (4.6)$$

<u>Df 3</u>. Работа сил *для системы материальных* точек (*для механической системы* в общем случае) есть *сумма всех работ* сил, действующих на все элементы системы (на все *материальные точки системы*):

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{L_i} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r}_i \qquad (4.7)$$

Работа постоянной силы. Пусть сила остается постоянной по величине и направлению:

$$\bar{F} = const\,.$$

Тогда (здесь достаточно использовать криволинейный интеграл I рода), используя формулу (4.3), получаем:

$$A = \int\limits_{S_1}^{S_2} F\cos\alpha dS = F\cos\alpha \int\limits_{S_1}^{S_2} dS = F\cos\alpha(S_2 - S_1) = F\Delta S\cos\alpha\,.$$

Считая, что в начале пути пройденный путь равен нулю (изменение пути равно самому пути, опускаем Δ):

$$A = FS\cos\alpha \qquad (4.8)$$

– привычная школьная формула 😊.

Работа, как интеграл по длине пути (*криволинейный интеграл I рода*). Используя формулу (4.3), получим:

$$A = \int\limits_L dA = \int\limits_{S_2}^{S_1} F(S)\cos\alpha(S)dS \qquad (4.9)$$

– обыкновенный (*определённый*) интеграл, где

$$F = F(S)\,,$$

$$\alpha = \alpha(S)\,.$$

Если воспользоваться соотношением (4.4), интеграл для вычисления работы будет иметь вид

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(t)\cdot \mathrm{v}(t)\cdot\cos\alpha(t)dt\,. \qquad (4.10)$$

Работа, как интеграл по дифференциальной форме (*криволинейный интеграл II рода*). Подставим в криволинейный интеграл II рода значение формы из выражения (4.5). Получим:

$$A = \int_L F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \,. \tag{4.11}$$

Или, переходя от криволинейного интеграла к интегралам по времени:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{v}_x + F_y \mathrm{v}_z + F_z\,\mathrm{v}_z dt \,, \tag{4.12}$$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{v}_x dt}_{Ax} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{v}_z\,dt}_{Ay} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} F_z\,\mathrm{v}_z dt}_{Az} \,. \tag{4.13}$$

Из последнего выражения видно, что полная *работа силы* будет *равна сумме работ*, *рассчитанных для каждой координаты в отдельности*:

$$A_x = \int_{x_1}^{x_2} F_x \mathrm{v}_x\,dt \,,\quad A_y = \int_{y_1}^{y_2} F_y\,\mathrm{v}_y dt \,,\quad A_z = \int_{z_1}^{z_2} F_z \mathrm{v}_z\,dt \,.$$

Тогда:

$$A = A_x + A_y + A_z \,. \tag{4.14}$$

Обратите внимание: это не разложение работы на проекции по координатам, ***а работа, совершаемая проекциями координат***.

<u>Df 3.</u> Мощностью называется работа за единицу времени.

Более точно

$$N = \frac{dA}{dt} \,. \tag{4.15}$$

Измеряется в *ваттах*, $[Bm] = \frac{[Дж]}{[c]} = \frac{[кг][м]^2}{[c]^3}$. Международное обозначение $[W]$.

Т.е. <u>мощность</u> – производная работы по времени.

$$dA = \bar{F} \cdot \bar{\mathrm{v}} dt \Rightarrow N = \frac{\bar{F} \cdot \bar{\mathrm{v}} dt}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{\mathrm{v}} \,,$$

$$N = \bar{F} \cdot \bar{\mathrm{v}} \,. \tag{4.16}$$

<u>Df 4.</u> КПД – коэффициент полезного действия, отношение полезной работы к полной работе:

$$\eta = \frac{A_{полезная}}{A_{полная}} \,. \tag{4.17}$$

4.2. Энергия

***Df 1*:** (*философское*). Все тела в природе существуют в непрерывном движении, где под движением понимается не только механическое движение, а видоизменение вообще. **Энергия** является мерой этого движения.

***Df 2*:** (*физическая энциклопедия*). Общая количественная мера (*механического*) движения и взаимодействия всех видов называется **энергией**.

***Df 3*:** (*школьное*). **Энергия** – способность тела совершать работу.

Замечание: в качестве основного будем использовать второе определение. Однако искать такую «общую количественную меру» будем, «подгоняя под ответ третьего определения» (её изменение должно равняться работе). Причём нам необходима, чтобы эта величина была аддитивна (энергия системы, состоящей из двух частей, должна равняться сумме энергий этих частей).

4.3. Кинетическая энергия

Рассмотрим материальную точку, на которую действует сила (*или равнодействующая сил*). Введём понятие кинетической энергии.

Запишем для этой материальной точки ***II закон Ньютона***:

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} \quad \Big| \cdot \bar{v}$$

(*Умножим обе части на* $\bar{v}$ *скалярно*)

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \bar{v}, \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Тогда:

$$m\bar{v} \cdot \frac{d\bar{v}}{\cancel{dt}} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{\cancel{dt}}.$$

$$m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Внесём скорость под дифференциал (учтём, что $\bar{v} \cdot \bar{v} = \bar{v}^2 = |\bar{v}|^2 = v^2$):

$$m\frac{1}{2} d v^2 = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

Если масса постоянна, её тоже можно внести под дифференциал. При этом учтём, что в правой части у нас стоит элементарная работа:

$$d\,\frac{mv^2}{2} = dA$$

$$\int_{v_1}^{v_2} d\,\frac{mv^2}{2} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

$$T_2 - T_1 = A, \qquad (4.18)$$

где $T = \dfrac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки.

Вообще говоря

$$T = \int d\,\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + C\,.$$

По логике вещей

$$\upsilon = 0 \Rightarrow T = 0\,.$$

Но тогда

$$T\Big|_{\upsilon\,=\,0} = \frac{m\upsilon^2\Big|_{\upsilon\,=\,0}}{2} + C = \frac{m\cdot 0^2}{2} + C = C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Df*. 1. *Кинетическая энергия – есть энергия механического движения, определяемая формулой

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \tag{4.19}$$

Замечание 1. Выражение (4.19) можно записать, как сумму проекций на оси координат:

$$\upsilon^2 = \mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2\,.$$

Тогда:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\left(\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2\right)}{2} =$$

$$= \frac{m\mathrm{v}_x^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}_y^2}{2} + \frac{m\mathrm{v}_z^2}{2} = T_x + T_y + T_z\,,$$

$$T = T_x + T_y + T_z\,. \tag{4.20}$$

– *Кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий, рассчитанных для проекций скорости на оси координат*. Опять заметим, это не есть «проекция энергии на оси координат».

Замечание 2. Из приведённых рассуждений, из выражения (4.18) вытекает, что

$$\Delta T = A \tag{4.21}$$

Мы получили *теорему о кинетической энергии материальной точки*:

Th*. *1.1*. *Теорема о кинетической энергии *для материальной точки. Работа силы* (*равнодействующей сил*), действующей на материальную точку, будет равна *изменению её кинетической энергии*.

Возможна и друга формулировка этой теоремы:

<u>Th</u>. 1.2. ***Теорема о кинетической энергии*** *для материальной точки. Работа силы* (*равнодействующей сил*), действующей на материальную точку, *идёт на изменение её кинетической энергии*.

Но в данном случае это эквивалентные утверждения.

<u>Df</u>. 2 *кинетической энергии тела*. Под ***кинетическая энергия механической системы*** (***тела***) будем понимать *сумму кинетических энергий всех элементов системы* (*сумму кинетических энергий всех материальных точек системы*):

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{4.22}$$

Из выражений (4.7), (4.22) и (4.21) напрямую следует:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} A_i}_{A_\Sigma} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \Delta T_i}_{\Delta T}$$

$$A_\Sigma = \Delta T \tag{4.23}$$

<u>Th</u>. 2. ***Теорема о кинетической энергии тела.*** *Работа всех сил*, действующей на тело, *идёт на изменение его кинетической энергии*.

Замечание 3. Однако, ***обратите внимание***, речь идёт о *суммарной работе всех сил*, а не о *работе равнодействующей всех сил*!

Рассмотрим абсолютно твёрдое тело, которое движется поступательно. Просуммируем выражение (4.21), принимая во внимание только что введённое определение:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

Левая часть данного уравнения даст нам изменение кинетической энергии тема:

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{N} \left(T_{2i} - T_{1i}\right) = \sum_{i=1}^{N} T_{2i} - \sum_{i=1}^{N} T_{1i}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta T_i = T_2 - T_1 = \Delta T$$

Рассмотрим правую часть уравнения, подставим туда выражение для работы силы:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r}_i$$

Поскольку при поступательном движении тела все материальные точки тела за равные промежутки времени совершают равные перемещения (см. определение поступательного движения тела, раздел 2.7), все элементарные перемещения всех материальных точек будут равны:

$$\forall i, j : d\,\bar{r}_i = d\,\bar{r}_j = d\,\bar{r} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{F}_i \cdot d\,\bar{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{F}_i \cdot d\,\bar{r}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i\right)}_{\bar{F}_{Равнодействующая}} \cdot d\,\bar{r} = \bar{F}_{Равнодействующая} \cdot d\,\bar{r} = A_{Равнодействующая}$$

Правая часть уравнения будет равна работе равнодействующей всех сил, действующих на материальные точки нашего тела.

Теперь вспомним, что мы разделили силы на внешние и внутренние (силы, действующие на механическую систему, тело извне и силы, действующие между элементами системы). По *III з-ну Ньютона* для любой внутренней силы будет существовать внутренняя сила, равная ей по величине и противоположная по направлению. Учитывая равенство перемещений всех материальных точек тела, мы приходим к выводу о том, что *суммарная работа всех внутренних сил будет равна нулю*.

$$\forall i \cdots \exists\, j : \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{ij} \cdot d\,\bar{r} + \bar{F}_{ji} \cdot d\,\bar{r} = \left(\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji}\right) \cdot d\,\bar{r} = \left(\bar{F}_{ij} - \bar{F}_{ij}\right) \cdot d\,\bar{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = \bar{F}_{Равнодействующая} \cdot d\,\bar{r} = \bar{F}_{\substack{Равнодействующая \\ внешних\ \ сил}} \cdot d\,\bar{r} = A_{\substack{Равнодействующая \\ внешних\ \ сил}}$$

В итоге мы приходим к утверждению, что сумма всех работ будет равна работе равнодействующей всех внешних сил, действующих на абсолютно твёрдое тело.

Окончательный вывод будет звучать так: *изменение кинетической энергии абсолютно твёрдого тела при поступательном движении будет равно работе равнодействующих всех внешних сил, действующих на тело*:

$$\Delta T_{Поступательного} = A_{\substack{Равнодействующая \\ внешних\ \ сил}}$$

В итоге мы приходим к следующему утверждению:

***Th*. 2. Теорема о кинетической энергии** *при поступательном движении абсолютно твёрдого тела. Работа равнодействующей внешних сил*, приложенных к абсолютно твёрдому телу, *при его поступательном движении* равна *изменению кинетической энергии тела*.

***Th*. 3. Теорема о кинетической энергии** *для поступательной составляющей при движении абсолютно твёрдого тела. Работа равнодействующей внешних сил*, приложенных к абсолютно твёрдому телу равна *изменению кинетической энергии поступательной составляющей движения тела* (см. раздел 2.9).

4.4. Кинетическая энергия и работа при вращательном движении

4.4.1. Работа при вращательном движении

Пусть тело движется по окружности радиуса R, момент силы $\bar{M}$ направлен по оси вращения. Пусть сила, создающая момент направлена по касательной к этой окружности:

$$M = \left|\bar{M}\right| = \left|\bar{F} \times \bar{r}\right| = F\ r \underbrace{\sin\alpha}_{=1} = F\ r,$$

Элементарное перемещение $d\,\bar{r}$ будет направлено по касательной к этой окружности, перпендикулярно моменту, и, следовательно, параллельно силе, создающий этот момент.

Тогда:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$$ – элементарная работа,

$$\bar{F} \uparrow\uparrow d\bar{r} \Rightarrow \bar{F} \cdot d\bar{r} = Fdr = FdS \quad \left(dS = dr\right),$$

$$dS = Rd\varphi,$$

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = \underbrace{FR}_{M\left(R \equiv l_F\right)} d\varphi = Md\varphi.$$

В итоге, имеем:

$$dA = Md\varphi.$$

Если момент силы не параллелен оси вращения, выражение примет вид:

$$dA = M_\omega d\varphi,$$

где

M_ω – проекция момента силы на направление угловой скорости.

Получили выражение для элементарной работы при вращательном движении в векторном виде:

$$dA = \bar{M} \cdot \overline{d\varphi}. \qquad (4.24)$$

Проведя несложные преобразования выведем формулу для мощности:

$$\overline{d\varphi} = \bar{\omega}\,dt$$

$$dA = \bar{M} \cdot \bar{\omega}\,dt$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \bar{M} \cdot \bar{\omega} \qquad (4.25)$$

4.4.2. Кинетическая энергия вращательного движения

$$\left.\begin{aligned} T_i &= \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} \\ \upsilon_i &= R_i \omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_i = \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2}_{I} = \frac{I\omega^2}{2}$$

В итоге:

$$T_{вр.дв.} = \frac{I\omega^2}{2} \tag{4.26}$$

$$\bar{M} \cdot \overline{d\varphi} = dT_{вр.дв.} \tag{4.27}$$

$$A_{вр.дв.} = \Delta T_{вр.дв.} \tag{4.28}$$

Из всего выражения (4.28) можно сделать вывод *об изменении кинетической энергии вращательного движения* – (4.28).

***Th*. 1. Теорема о кинетической энергии** *вращательного движения абсолютно твёрдого тела. Работа равнодействующей моментов внешних сил,* приложенных к абсолютно твёрдому телу равна *изменению кинетической энергии вращательного движения тела*

Замечание 2. В случае представления плоского движения как поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центра масс имеем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{m\upsilon_{ц.м.}^2}{2} + \frac{I_{ц.м.}\omega^2}{2} \tag{4.29}$$

Замечание 3. Теперь можно окончательно сформулировать *теорему о кинетической энергии для абсолютно твёрдого тела*:

***Th*. 2. Теорема о кинетической энергии** *для абсолютно твёрдого тела. Изменение кинетической энергии тела равна сумме работы равнодействующей внешних сил и работы моментов внешних сил, приложенных к телу.*

4.5. Классификация сил по производимой ими работе

Из всех видов сил можно выделить три класса по виду совершаемой ими работы.

1) Консервативные силы.

***Df* 1. Консервативные силы** – это силы, работа которых не зависит от траектории, а только от начальной и конечной точки перемещения.

К этим силам относятся: сила упругости по закону Гука, сила тяжести, электростатические силы

2) **<u>Диссипативные силы.</u>**

<u>Df</u>* *2. Диссипативные силы – силы, работа которых может зависеть от траектории, скорости, и по знаку всегда отрицательна.

Диссипативные силы рассеивают механическую энергию, переводят в тепло. К ним относятся, в частности, сила трения, сила сопротивления

3) **<u>Гироскопические силы.</u>**

<u>Df</u>* *3. Гироскопические силы – силы, работа которых всегда равна нулю.

Это силы, создающие центростремительное ускорение (*сила Лоренца*)

4.6. Физические и математические поля

Взаимодействие тел осуществляется посредством полей (*физических полей*).

<u>Поле</u> (*физическое поле*) является видом материи, таким же, как вещество. Оно передает взаимодействие от одного тела к другому. Можно говорить об электростатическом, гравитационном, сильном и слабом полях.

Для математического описания физических полей используется понятие силового поля.

<u>Силовое поле</u> – область пространства, в каждой точке которого задана физическая сила. С математической точки зрения, силовое поле является векторным полем, в частном случае поле (математическое поле).

В математике полем (математическим полем) называется область пространства (векторного пространства $\mathbb{R}^3$), в каждой точке которого задана некоторая математическая величина:

скалярная величина – скалярное поле

векторная величина – векторное поле

тензорная величина – тензорное поле.

4.7. Поля консервативных сил

Говоря о консервативных силах, обычно говорят о ***поле консервативных сил*** или ***<u>консервативном поле сил</u>***.

Замечание: иногда в качестве определения консервативных сил используется утверждение, которое в нашем случае будет являться *необходимым и достаточным условием консервативности*.

Эквивалентное определение консервативных сил:

- *Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна* ***нулю***.

В нашем случае данное утверждение есть *необходимое и достаточное условие* консервативности поля сил. Однако иногда утверждение о равенстве нулю работы по замкнутому контуру принимают за определение консервативности поля сил. Тогда утверждение о независимости работы от траектории становится *необходимым и достаточным условием*. Однако мы будем рассуждать именно в установленном нами порядке (независимость работы от траектории – определение, равенство нулю работы по замкнутому контуру – необходимое и достаточное условие).

Необходимость. Рассмотрим поле консервативных сил. Материальная точка перемещается из (1) в (2) по траектории ***a*** и из (2) в (1) по траектории ***b***:

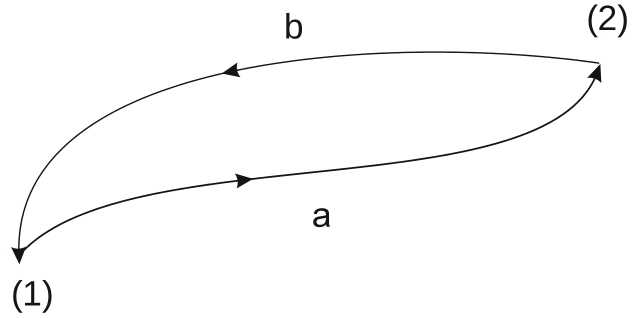


Рисунок 4.2
Работа консервативных сил по замкнутому контуру (*необходимость*)

1) $A_{(1)a(2)} = A_{(1)b(2)}$,
т.к. не зависит от траектории.
2) $A_{(2)b(1)} = -A_{(1)b(2)}$
т.к. работа «***туда***» равна минус работа «***обратно***»:

$$dA = d\bar{r} \cdot \bar{F} \ .$$

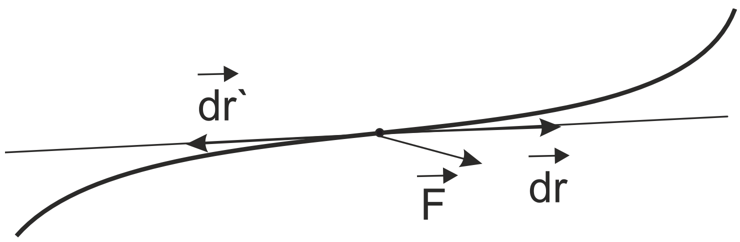


Рисунок 4.3
Работа консервативных сил при прямом и обратном перемещении

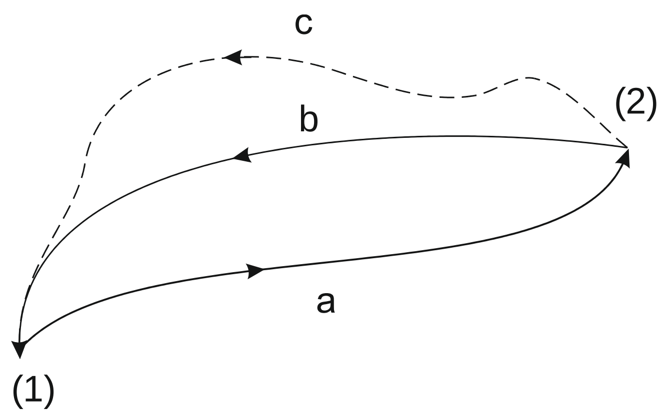
$$dA' = \bar{F} \cdot dr' = \bar{F} \cdot (-d\bar{r}) = -\bar{F} \cdot d\bar{r} = -dA$$

$$A_{\bigcirc} = A_{(1)a(2)b(1)} = A_{(1)a(2)} + A_{(2)b(1)} = A_{(1)a(2)} - A_{(1)b(2)} = 0$$

$$\text{т.к. } A_{(1)a(2)} = A_{(1)b(2)}$$

Утверждение: работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю (*необходимое условие*).

Достаточность. А теперь рассмотрим ту же самую ситуацию. Только возвращаться из (2) в (1) будем по траекториям ***b*** и ***c***:



а **б**

Рисунок 4.4

Работа консервативных сил по замкнутому контуру (*достаточность*)

1) $A_{\bigcirc} = A_{(1)a(2)b(1)} = A_{(1)a(2)} - A_{(1)b(2)} = 0 \Rightarrow A_{(1)a(2)} = A_{(1)b(2)}$,

т.к. работа по замкнутому контуру равна *нулю*.

2) $A_{\bigcirc} = A_{(1)a(2)c(1)} = A_{(1)a(2)} - A_{(1)c(2)} = 0 \Rightarrow A_{(1)a(2)} = A_{(1)c(2)}$

т.к. работа «***обратно***» по траектории $\boldsymbol{a}$ и траектории $\boldsymbol{b}$ равны:

$$\begin{cases} A_{(1)a(2)} = A_{(1)b(2)} \\ A_{(1)a(2)} = A_{(1)c(2)} \end{cases} \Rightarrow A_{(1)b(2)} = A_{(1)c(2)}.$$

То есть, работа в данном случае не зависит от траектории (*что и требовалось доказать*).

Рассмотрим ***примеры полей консервативных сил****.*

Выделяют: 1) поле центральных сил (центральное поле сил)

2) однородное поле сил.

Df 1*. *Центральным полем сил называется поле сил, которые направлены по лучам, исходящим из одного центра, и по величине зависят только от расстояния до этого центра.

Df 2*. *Однородным полем сил называется ***поле сил*** *равных по величине и направлению* во всех точках. Однородное поле сил можно считать частным случаем центрального поля сил с бесконечно удаленным центром.

Центральные поля сил

Пусть задано центральное поле сил с центром в точке ***O***. Пусть материальная точка перемещается из положения ***(1)*** в положение ***(2)*** и её радиус-вектор получает при этом приращение $\overline{dr}$:

$$\overline{r}_1 = \overline{r}(t)$$

$$\overline{r}_2 = \overline{r}(t+dt)$$

$$\overline{dr} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$$

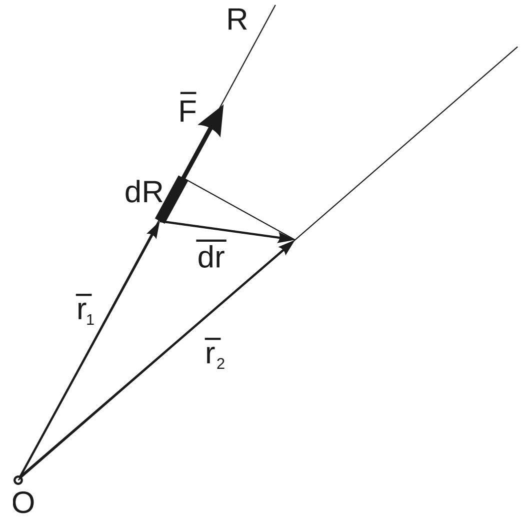


Рисунок 4.5
Центральное поле сил

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = Fdr\cos\alpha$$

– скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Но тогда,

$$dr\cos\alpha = dr_{Пр_R} = dR$$

– проекция $\overline{dr}$ на R или приращение радиус-вектора.

В итоге имеем:

$$dA = Fdr\cos\alpha = FdR$$

Вычислим работу, подставив полученное выражение под интеграл:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} F\cos\alpha dr = \int_{(1)}^{(2)} FdR =$$

Вспомним, также, что работа зависит только от расстояния до центра

$$= \int_{R_1}^{R_2} F(R)dR = G(R_2) - G(R_1),$$

где $F(R) = G'(R)$. То есть $\boldsymbol{G}$ есть первообразная для $\boldsymbol{F}$.

Т. о. мы показали, что ***центральное поле сил является консервативным полем сил***, так как его работа зависит только от начального и конечного положения тела (*а точнее, от начального и конечного расстояния до центра*).

Примеры:

Сила всемирного тяготения

$$\bar{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)$$ – сила;

$$A = G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2}$$ – работа силы.

Сила упругости (*закон Гука*)

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$ – сила;

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$ – работа силы.

Однородное поле сил.

Пусть задано однородное поле сил и пусть величина силы в каждой точке равна $\boldsymbol{F}$ (*то есть, постоянна*). Пусть материальная точка перемещается из (1) в (2).

$$A = \int\limits_{(1)}^{(2)} F\cos\alpha dr = F\int\limits_{(1)}^{(2)} \cos\alpha dr = F\int\limits_{(1)}^{(2)} dl = Fl$$

Здесь l – проекция перемещения на направление действия силы (*расстояние между начальной и конечной точками по линии действия силы*). Таким образом, ***однородное поле сил является центральным полем сил***.

Пример:

$$\bar{F} = m\bar{g}$$
$$A = mgh$$

4.8. Потенциальная энергия

<u>Утверждение</u>. Для консервативных полей *всегда* можно ввести такую функцию U – $U = U(x;y;z)$, что работа по перемещению материальной точки в данном поле может быть представлена как убыль данной функции (*работа равна разнице данной функции в конечной и начальной точках*).

$$A = U_1 - U_2 \tag{4.30}$$

Докажем это, приведя конкретный пример такой функции.

Рассмотрим область пространства с заданным в ней полем консервативных сил. Пусть $\boldsymbol{A}$ – произвольный центр. Зададим функцию U в виде $U_{(\bar{r})} = A_{(\bar{r})\to(A)} + U_0$, где $U_{(\bar{r})}$ – значение данной функции для точки, заданной радиус-вектором $\bar{r}$, $A_{(\bar{r})\to(A)}$ – работа по перемещению материальной точки в точку $\boldsymbol{A}$, из точки, заданную радиус-вектором $\bar{r}$: $(A)\to(r)$, U_0 – произвольная константа.

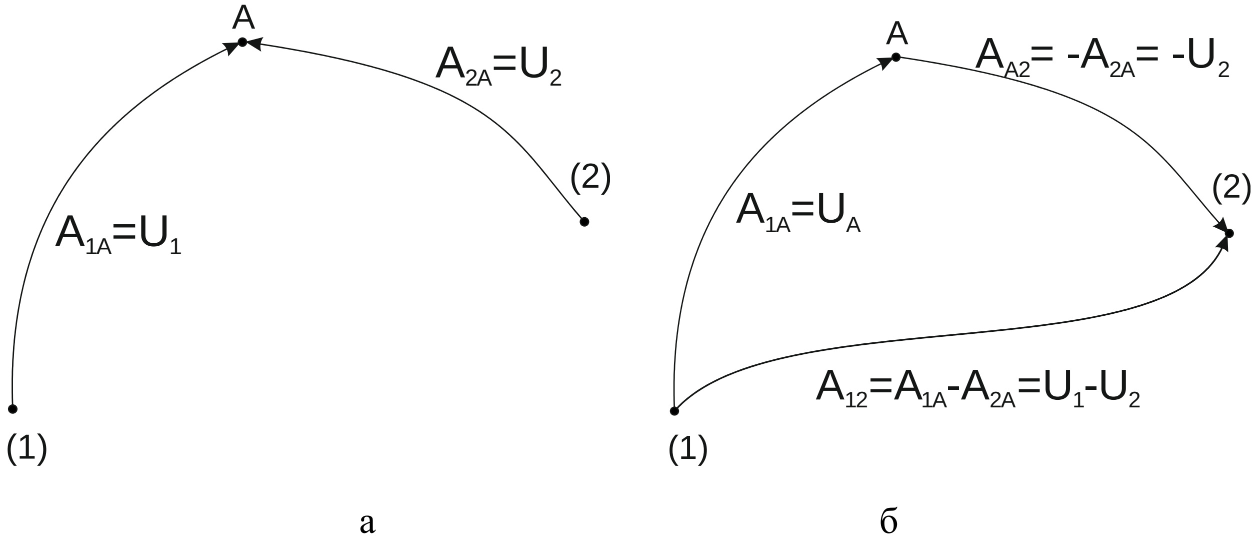


Рисунок 4.6

Потенциальная энергия, как работа по перемещению
из заданной точки в выбранный центр А:

а. Определение потенциальной энергии

б. Выражение работы через убыль энергии

Поскольку в поле консервативных сил работа не зависит от траектории перемещения, вместо исходной траектории сначала переместим нашу точку в выбранный центр $\boldsymbol{A}$, а затем уже из этого центра переместим в конечную точку пути. Тогда имеем:

$$A_{(1)\to(2)} = A_{(1)\to(A)} + A_{(A)\to(2)} = A_{(1)\to(A)} + \left(-A_{(2)\to(A)}\right) = A_{(1)\to(A)} - A_{(2)\to(A)} =$$
$$= A_{(1)\to(A)} - A_{(2)\to(A)} + U_0 - U_0 = (A_{(1)\to(A)} + U_0) - (A_{(2)\to(A)} + U_0) = U_{(1)} - U_{(2)}$$

Эта функция называется ***потенциальной энергией***. Потенциальная энергия есть энергия взаимодействия тел. Потенциальной энергией обладают тела, находящиеся в поле консервативных сил, созданном другими телами.

Df*. 1.1. *Потенциальная энергия *материальной точки в поле консервативных (потенциальных) сил* – такая функция координат (*и времени в общем случае*), что работа по перемещению материальной точки из одной точки пространства в другую равна убыли этой функции (*разности её значений в начальной и конечной точках пути*).

Можно дать и второе (более конкретное) определение:

Df*. 1.2. *Потенциальная энергия *материальной точки в поле консервативных (потенциальных) сил* – это работа по перемещению данной материальной точки из данной точки пространства в *центр* ***O*** – выбранную точку начала отсчёта потенциальной энергии:

$$U\left(\bar{r}\right) = A_{\bar{r}\to O}.$$

Энергия этого центра принимается за ***0***, а сам центр за начало отсчёта потенциальной энергии.

***Замечание* 1.** Потенциальная энергия (в отличии от кинетической) всегда известна с точностью до аддитивной постоянной – мы всегда можем выбрать начало отсчёта, ноль потенциальной энергии, изменив тем самым её на постоянную величину. Как пример. Стоя на полу в комнате, мы можем считать свою потенциальную энергию равной нулю. Но стоит выглянуть в окно и посмотреть вниз, и мы поймём, что она может на самом деле очень сильно отличаться от нуля (скажем на 10-ом этаже)! И так, мы можем принять за ноль как потенциальную энергию на уровне пола комнаты. Так и на уровне асфальта коло дома – это наша право выбора нулевого уровня. И именно этот и называется, что величина известна с *точностью до аддитивной постоянной*, то есть постоянной величины, которую можно прибавить или отнять (если величина отрицательна) к значению нашей энергии.

Замечание* 2.** Из определения ***2 для потенциальной энергии так же следует, что её можем представить в виде 3-х компонент по проекциям силы на оси координат: $\boldsymbol{U_x}$, $\boldsymbol{U_y}$, $\boldsymbol{U_z}$. Из выражения (4.14) непосредственно следует:

$$U_x\left(\bar{r}\right) = A_{x(\bar{r}\to O)},$$

$$U_y\left(\bar{r}\right) = A_{y(\bar{r}\to O)},$$

$$U_y\left(\bar{r}\right) = A_{y(\bar{r}\to O)}.$$

Не трудно показать, из утверждения о том, что *работа силы не зависит от траектории*, непосредственно следует, что *от вида траектории не будут зависеть и работы проекций сил*. А именно, мы можем варьировать (изменять) траекторию так, что будет меняться только одна из координат. В этом случае измениться может только работа соответствующей проекции силы (в проекции на остальные оси координат соответствующие изменения элементарных перемещений будут равны нулю). Следовательно свойство независимости от траектории будет независимо распространятся на все при проекции работы, и мы можем говорить о *потенциальной энергии проекций сил*.

***Замечание* 3.** Можно доказать, что сила, действующая на тело в потенциальном поле, всегда равна минус градиенту от потенциальной энергии этого тела:

$$\bar{F} = -gradU$$

или (*в других обозначения*)

$$\bar{F} = -\nabla U$$

Здесь ***grad*** – градиент скалярной функции, вычисляемой по формуле:

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k},$$

а «∇» – оператор набла:

$$\nabla ? = \frac{\partial ?}{\partial x}?\bar{i} + \frac{\partial ?}{\partial y}?\bar{j} + \frac{\partial ?}{\partial z}?\bar{k},$$

где вместо знака вопроса (**?**) надо подставить величину, на которую действует оператор и конкретный вид математической операции между производной и ортом оси координат (*для градиента это умножение вектора на скаляр*).

Окончательно в подстановке имеем выражение:

$$\overline{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\overline{k} \right).$$

Однако подробно этот материал будет разбираться нами в ходе изучения *электромагнетизма* в разделе «***Взаимосвязь напряжённости и потенциала***».

***Замечание* 4.** Можно доказать и обратное утверждение – если для силы, действующей на материальную точку (*системы материальных точек, тело*) можно ввести функцию, убыль которой будет равна производимой этой силой работе (можно ввести *потенциальную энергию*), то *эта сила будет консервативная*. Собственно говоря, это очевидно: пусть для некоторого силового поля (поля сил) можно ввести функцию, убыль которой будет равна работе сил этого поля (*то есть, работу можно вычислить, как разность этой функции в начальной и конечной точке*), именно такую функцию мы и называем потенциальной энергией. Из этого следует, что работа всегда будет зависеть только от значения этой функции в начальной и конечной точках и не будет зависеть от формы траектории. Следовательно это силовое поле (поле сил) – есть поле консервативных сил, а сама сила является консервативной.

Вообще говоря, в математика (в математической теории поля) доказывается теорема о том, что следующие 4-е утверждения эквивалентны:

1. Контурный интеграл (*криволинейный интеграл*) не зависит от формы кривой.
2. Интеграл по замкнутому контуру равен нулю.
3. Для функции, стоящей под интегралом, существует потенциал (под потенциалом в данном случае понимается скалярная функция, *градиент* которой с обратным знаком равен данной функции).
4. Под интегралом стоит полный дифференциал.

Df 2 Под ***потенциальной энергией механической системы*** будем понимать *сумму потенциальных энергий всех элементов системы*:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

– потенциальная энергия механической системы (*тела*).

В частности, *потенциальная энергия системы материальных точек* будет равна *сумме потенциальных энергий всех материальных точек системы*.

***Замечание* 5.** Это определение потенциальной энергии тела (*системы материальных точек*) удовлетворяет данному нами определению потенциальной энергии – общая работа сил для всех элементов системы (в частности, *для всех материальных точек системы*) будет равна убыли потенциальной энергии этой системы (системы материальных точек, тела, механической системы вообще):

$$\Delta U = \Delta\left(\sum_{i=1}^{N} U_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{N} A_i = A$$

***Замечание* 6.** Из соображений аддитивности также следует, что, если в некоторой области пространства имеются в наличии несколько консервативных полей, то их сумма (*равнодействующая сил этих полей*) также будет консервативным поле:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{i\,(1-O)} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r}}_{I} = \int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r} = \underbrace{\int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \bar{F}_{\substack{Равно\\действующая}} \cdot d\,\bar{r}}_{II} = A_{(1-O)}$$

Если каждый из интегралов ***I*** под знаком суммы не зависит от пути интегрирования, то и интеграл ***II*** тоже не будет завесить от пути интегрирования. Суммарное поле тоже будет консервативным.

Причём потенциальная энергия суммарного поля в каждой точке будет равен алгебраической сумме потенциалов этих полей в данной точке:

$$U = A_{(1-O)} = \int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \bar{F}_{\substack{Равно\\действующая}} \cdot d\,\bar{r} =$$

$$= \int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\substack{l\\(1)\to O}} \bar{F}_i \cdot d\,\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} A_{i\,(1-O)} = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

Сумма консервативных (*потенциальных*) *полей – есть консервативное* (*потенциальное*) *поле*.

5. Законы сохранения

5.1. Закон сохранения механической энергии

Df. Механической энергией называется сумма потенциальной и кинетической энергий:

$$E_{механ.} = T + U \tag{5.1}$$

5.1.1. Закон сохранения механической энергии для системы материальный точке в поле консервативных сил

Закон сохранения механической энергии для материальной точки в потенциальном поле сил.

Пусть материальная точка находится в поле консервативных сил. И пусть точка перемещается в этом поле. Тогда работа $A_{(1)\to(2)} = T_2 - T_1$, где T – кинетическая энергия. С другой стороны, $A_{(1)\to(2)} = U_1 - U_2$. Получим:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2,$$

$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2.$$

Т.о. сумма потенциальной и кинетической энергий материальной точки остается неизменной.

Закон сохранения механической энергии для системы материальных точек.

Рассмотрим систему материальных точек, находящихся в поле консервативных сил.

Запишем для каждой из них полученный только что закон сохранения:

$$T_{11} + U_{11} = T_{12} + U_{12}$$

$$T_{21} + U_{21} = T_{22} + U_{22}$$

$$\ldots$$

$$T_{n1} + U_{n1} = T_{n2} + U_{n2}$$

Просуммируем все уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{i1} + \sum_{i=1}^{n} U_{i1} = \sum_{i=1}^{n} T_{i2} + \sum_{i=1}^{n} U_{i2}.$$

Пусть:

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i$$ – кинетическая энергия механической системы (*тела*).

$$U=\sum_{i=1}^{n}U_i$$ – потенциальная энергия механической системы (*тела*).

Тогда:

$$T_1+U_1=T_2+U_2$$
$$T+U=const$$

$$A_{Неконсервативных}=0\Rightarrow E_{Механ.}=T+U=const \qquad (5.2)$$

– *механическая* или *полная механическая энергия* системы материальных точек (*механической системы, тела*) сохраняется, если на эту систему и внутри этой системы *действуют только консервативные силы*. (*закон сохранения полной механической энергии для системы материальных точек*).

Внимание! *Это не окончательная формулировка закона сохранения полной механической энергии!*

5.1.2. Закон сохранения полной механической энергии

На самом деле, в общем случае закон сохранения механической энергии звучит несколько по-другому, чем в нашем выводе. *Из внешних сил* мы, действительно, можем допустить *наличие* только лишь *консервативных сил*. А вот *внутри системы* нам важно *отсутствие диссипативных сил* остальные же силы не будут ни *выводить* энергию *из системы*, ни *превращать в немеханические виды энергии*.

Df. ***Консервативной системой*** называется такая механическая система, на которую действуют только консервативные внешние силы и в которой отсутствуют внутренние диссипативные силы.

Закон **сохранения механической энергии (*закон сохранения полной механической энергии*):** Механическая энергия консервативной системы остается неизменной.

Доказательство. И так, из утверждения (5.2) следует, что если на механическую систему и внутри неё действуют только консервативные силы, то механическая энергия системы остаётся неизменной. Посмотрим, можно ли ослабить это утверждение.

Рассмотрим *внешние силы*. Как мы сказали в самом начале, искать выражение для энергии мы будем из условия, что *её изменение должно равняться работе*. Именно так и было до сих пор. Только консервативные силы будут преобразовывать один вид механической энергии в другой для одной и той же материальной точки. Это следует из формулы (5.2) и утверждения, что понятие потенциальной энергии можно ввести только для консервативных сил (замечание 4 раздела 4.8). Таким образом, любая внешняя неконсервативная сила будет либо переводить механическую энергию в другой (немеханический) вид, либо передавать другому теме, не входящему в механическую систему. И в том, и в другом случае полная механическая энергия системе будет изменяться.

Теперь рассмотрим *внутренние силы*. В случае, если работа силы может иметь только отрицательный знак (*диссипативные силы*), эта *сила не может увеличивать механическую энергию какого-либо элемента системы*. Следовательно, если полная (вообще полная, а не полная механическая) энергия системы и будет сохраняться, по она в любом случае будет переходить в какой-то другой, немеханический вид. *Механическая энергия системы будет изменяться*.

Что же касается внутренних сил, *не относящихся ни к классу консервативных ни диссипативных*, они всё же могут иметь положительный знак, следовательно, могут увеличивать механическую энергию системе. С другой стороны, по *III закону Ньютона* для любой такой силы будет существовать равная ей по величине и противоположная по знаку сила, действующая на другой элемент, другую материальную точку механической системы. Поскольку эта сила имеет противоположный знак, противоположной знак будет иметь и совершаемая ей работа. Равенство работ следует и равенства абсолютных значений сил. Таким образом, уменьшение или увеличение механической энергии одного элемента, одной материальной точки системы будет приводить к увеличению или уменьшению механической энергии другого элемента этой же системы. В целом же механическая элегия системы останется неизменной. Точное математическое доказательство этих утверждений мы вынесем за рамки нашего курса.

Мы пришли к утверждению, что *механическая энергия будет сохраняться* именно в *консервативной системе*.

Замечание. Обратите внимание, что из ***теоремы о кинетической энергии твёрдого тела* (*2*)**, полученной в разделе 4.4.2, следует, что для сохранения механической энергии *недостаточно равенства нулю равнодействующей всех неконсервативных внешних сил*. Для её сохранения (*для того, чтобы механическая система была консервативной*), необходимо либо, чтобы *нулю равнялись все внешние неконсервативные силы*, либо чтобы *нулю равнялась их равнодействующая и их суммарный момент*.

5.1.3. Уравнение изменения механической энергии

Под механической энергией мы понимаем суму кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{механ.} = T + U$$

и сохраняется она, как мы выяснили, при отсутствии внешних не консервативных и внутренних диссипативных сил, именно работа этих сил и будет определять изменение механической энергии в случае, если закон сохранения не выполняется. В этом случае можно записать *уравнение изменения механической энергии*:

$$\Delta E_{механ.} = A_{\substack{внеш.\\ неконсервативных}} + A_{\substack{внутр.\\ диссипативных}} \tag{5.3}$$

Замечание. Учитывая замечания *о работе и энергии проекций сил и скоростей*, вполне возможно говорить о разложении механической энергии по координатам, имея в виду составляющие механической энергии, определяемые соответствующими проекциями скоростей и консервативных сил на оси координат (*но не в коем случае не проекции самой энергии –* ***скалярная величина не может быть спроецирована на ось координат*** *и вообще никуда**!***):

$$E_{Механ.x} = T_x + U_x, \qquad E_{Механ.y} = T_y + U_y, \qquad E_{Механ.z} = T_z + U_z,$$

$$E_{Механ.} = E_{Механ.x} + E_{Механ.y} + E_{Механ.z}.$$

Это может помочь нам в ряде доказательств. Отметим, что механическая энергия – единственный вид энергии, обладающий этим свойством. Внутренняя энергия, энергия квантовых состояний (как вариант внутренней энергии) этим свойством уже не обладают.

5.2. Закон сохранения полной энергии

Замечание. *За исключением этого параграфа*, на протяжении всего раздела физики «механика», если не оговорено отдельно и конкретно, *под законом сохранения энергии мы будем понимать закон сохранения механической энергии*, а не закон сохранения полной энергии.

В общем случае закон сохранения полной энергии (*закон сохранения энергии*) может быть сформулирован так:

Энергия не исчезает и не возникает, а лишь переходит из одного вида в другой.

В таком виде закон сохранения энергии носит скорее философский смысл (*окраску*). Более физично его можно сформулировать следующим способом:

Закон сохранения полной энергии: В системе, на которую действуют только консервативные силы, полная энергия сохраняется.

Отметим следующий факт – в формулировке закона исчезло слово «механическая» перед словом «энергия» и исчезло требование отсутствия внутренних диссипативных сил. Внешние неконсервативные силы выводят механическую энергию из системы. Она не исчезает, просто переходит в энергию других тел окружающей среды. Но внутренние диссипативные силы не выводят энергию из системы. Куда же она девается? Согласно общему утверждению, она должна переходить в другой вид. И для того, чтобы учесть эту форму её существования, мы вводим ещё один вид энергии – внутреннюю энергию (*энергию теплого движения молекул и межмолекулярного взаимодействия*). Именно сюда переходит механическая энергия благодаря диссипативным силам.

Закон изменения (*уравнение изменения*) энергии в этом случае будет звучать, как изменение энергии системы равно работе внешних неконсервативных сил:

$$\Delta E = A_{\substack{Внешних\\ неконсервативных}}$$

Немного перефразировав пример Фейнмана из его знаменитых лекций, можем пояснить закон сохранения энергии так:

Ели у Вас есть мобильный телефон, то он никуда не может подеваться. И если вы не можете найти его в привычном мечте, то, возможно, он завалился в потайной карман сумки или рюкзака, возможно, Вы оставили его дома или забыли у друзей. В конце концов, его мог не вернуть Ваш друг, которому Вы дали телефон позвонить. Или даже его могли украсть. Замете, при этом телефон прекратил своё существование у Вас. Но, вообще-то, где-то он существует. И даже если его раздавил автомобиль или по нему проехался каток, он просто перешел в новое состояние – из «телефона работающего» в «телефон не работающий» (*груду деталей*). Но при этом он существует, как сущность. Заметьте, это совершено беспроигрышный вариант. Мы всегда можем пояснить друзьям, куда делся или во что превратился Ваш телефон. Правда для этого, возможно, нам придётся придумывать всё новые и новые сущности.

Отметим также ещё один момент. Закон сохранения энергии есть непреложный факт, в котором не будет сомневаться ни один здравомыслящий физик. Он следует из множества наблюдений, которые нельзя обменить или опровергнуть (эти факты просто не были наблюдены). Однако до некоторой степени этот закон является следствием выбранной нами модели. Мы уже говорили, что законы сохранения импульса и энергии есть следствие однородности и изотропности пространства и однородности времени. Они также выполняется только в случае, если выбранная нами модель основана на уравнениях второго порядка. Поясним это немного подробнее «на пальцах»:

Один мой коллега в разговоре на подобную тему высказал как-то раз следующую мысль: «Знаете ли, вот, каждый раз, как я еду на дачу мне приходится заправлять бак бензина. И для того, чтобы согреется на этой даче мне каждый раз приходится запасать дрова…». Эти фаты невозможно опровергнуть, так как они наблюдались, наблюдаются, и будут наблюдаться. Однако их можно, как выясняется, описать совершенно разным образом.

Энергия, в отличии от *массы* и *количества вещества*, является «неосязаемой величиной». В случае если основное уравнение теории имеет второй порядок – именно таким является второй закон Ньютона $\left(m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \right)$, в результате интегрирования появляются несколько произвольно задаваемых констант. Однако дело в том, что эти константы сохраняют своё значение при преобразовании координат, и того подобное, и, самое главное, имеют вполне определённый физический смысл. Однако, что ещё более важно, если пространство и время однородны и изотропны, значение этих констант не изменяется при сдвиге по одной из пространственных или временных осей в ту или иную сторону. Доказательство этого факта лежит за рамками рассматриваемой нами теории.

5.3. Закон сохранения импульса

(для системы материальных точек, тела)

Рассмотрим ***II закон Ньютона*** в импульсной формулировке:

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = \overline{F}_{Внешних},$$

где

$\overline{p}$ – суммарный импульс системы,

$\overline{F}$ – равнодействующая внешних сил, действующих на систему.

Пусть система замкнута:

$\Rightarrow \overline{F} = 0$ (*равнодействующая внешних сил*). Отсюда $\frac{d\overline{p}}{dt} = 0$

$\Rightarrow \overline{p} = const$

Отсюда **закон сохранения импульса:** Импульс ***замкнутой системы*** *остается неизменным*.

Напомним:

__Df.__ (*повторно*) ***Замкнутая система*** – система тел, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующие с другими телами (не взаимодействуют с окружающей средой). Также может называться ***изолированной*** системой.

Замечание 1. Уравнением изменения, соответствующим закону сохранения импульса, является II закон Ньютона.

Замечание 2. Важно помнить, что энергия и импульс сохраняется в разных системах, и мы можем иметь ситуацию, когда выполняется один и не выполняется другой закон.

Пример: 1) *Маятник*. Есть внешняя сила (*сила тяжести*). Однако она консервативна. Система консервативна, но не замкнута. Энергия сохраняется, импульс нет.

2) *Абсолютно неупругое соударение*. Есть сила неупругой деформации (*диссипативная*). Она внутренняя, но диссипативная. Симстема замкнута, но не консервативна. Импульс сохраняется, энергия нет.

5.4. Примеры применения закона сохранения импульса

Примеры применения закона сохранения импульса. Будем рассматривать соударение двух точечных тел – двух материальных точек. Т.ч. вращением этих тел можно пренебречь.

__Df 1:__ ***Абсолютно неупругий удар.*** Соударение двух тел, после которого оба тела начинают движение вместе, как единое целое.

__Df 2:__ ***Абсолютно упругий удар.*** Соударение двух тел, происходящее без потери кинетической энергии.

Абсолютно неупругое соударение.

$$\bar{p}_{11} + \bar{p}_{12} = \bar{p}_{21} + \bar{p}_{22}$$
$$\bar{p} = m\bar{\mathrm{v}}$$
$$m_1\bar{\mathrm{v}}_{11} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{12} = m_1\bar{\mathrm{v}}_{21} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{22}$$
$$\bar{\mathrm{v}}_{21} = \bar{\mathrm{v}}_{22} = \bar{\mathrm{v}}_2$$
$$m_1\bar{\mathrm{v}}_{11} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{12} = m_1\bar{\mathrm{v}}_2 + m_2\bar{\mathrm{v}}_2$$
$$m_1\bar{\mathrm{v}}_{11} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{12} = \left(m_1 + m_2\right)\bar{\mathrm{v}}_2$$
$$\bar{\mathrm{v}}_2 = \frac{m_1\bar{\mathrm{v}}_{11} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{12}}{m_1 + m_2} \tag{5.4}$$

Абсолютно упругое соударение. Здесь будем рассматривать только прямое соударение. То есть, до и после соударения оба тела будут двигаться по одной прямой.

$$\bar{p}_{11} + \bar{p}_{12} = \bar{p}_{21} + \bar{p}_{22}$$
$$\bar{p} = m\bar{\mathrm{v}}$$
$$m_1\bar{\mathrm{v}}_{11} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{12} = m_1\bar{\mathrm{v}}_{21} + m_2\bar{\mathrm{v}}_{22}$$
$$\frac{m_1\mathrm{v}_{11}^2}{2} + \frac{m_2\mathrm{v}_{12}^2}{2} = \frac{m_1\mathrm{v}_{21}^2}{2} + \frac{m_2\mathrm{v}_{22}^2}{2}$$
$$\frac{m_1\mathrm{v}_{11}^2}{\cancel{2}} - \frac{m_1\mathrm{v}_{12}^2}{\cancel{2}} = \frac{m_2\mathrm{v}_{22}^2}{\cancel{2}} - \frac{m_2\mathrm{v}_{21}^2}{\cancel{2}}$$
$$m_1\mathrm{v}_{11}^2 - m_1\mathrm{v}_{12}^2 = m_2\mathrm{v}_{22}^2 - m_2\mathrm{v}_{21}^2$$
$$m_1\left(\mathrm{v}_{11}^2 - \mathrm{v}_{12}^2\right) = m_2\left(\mathrm{v}_{22}^2 - \mathrm{v}_{21}^2\right)$$
$$a^2 - b^2 = \left(a+b\right)\left(a-b\right)$$
$$m_1\underbrace{\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} + \bar{\mathrm{v}}_{12}\right)}_{\left(\bar{\mathrm{v}}_{22}+\bar{\mathrm{v}}_{21}\right)}\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} - \bar{\mathrm{v}}_{12}\right) = m_2\underbrace{\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} + \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)}_{\left(\bar{\mathrm{v}}_{11}+\bar{\mathrm{v}}_{12}\right)}\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} - \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)$$
$$m_1\cancel{\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} + \bar{\mathrm{v}}_{12}\right)}\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} - \bar{\mathrm{v}}_{12}\right) = m_2\cancel{\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} + \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)}\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} - \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)$$
$$m_1\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} - \bar{\mathrm{v}}_{12}\right) = m_2\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} - \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)$$
$$\begin{cases} m_1\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} + \bar{\mathrm{v}}_{12}\right)\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} - \bar{\mathrm{v}}_{12}\right) = m_2\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} + \bar{\mathrm{v}}_{21}\right)\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} - \bar{\mathrm{v}}_{21}\right) \\ m_1\left(\bar{\mathrm{v}}_{11} - \bar{\mathrm{v}}_{12}\right) = m_2\left(\bar{\mathrm{v}}_{22} - \bar{\mathrm{v}}_{21}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}=\overline{v}_{22}+\overline{v}_{21}$$

$$\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}=\overline{v}_{22}+\overline{v}_{21}\Big|\cdot m_1 \Rightarrow m_1\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=m_1\left(\overline{v}_{22}+\overline{v}_{21}\right)$$

$$\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}=\overline{v}_{22}+\overline{v}_{21}\Big|\cdot m_2 \Rightarrow m_2\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=m_2\left(\overline{v}_{21}+\overline{v}_{22}\right)$$

$$-\begin{cases} m_1\left(\overline{v}_{11}-\overline{v}_{12}\right)=m_2\left(\overline{v}_{22}-\overline{v}_{21}\right) \\ m_2\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=m_2\left(\overline{v}_{21}+\overline{v}_{22}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$m_1\left(\overline{v}_{11}-\overline{v}_{12}\right)-m_2\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=m_2\left(\overline{v}_{22}-\overline{v}_{21}\right)-m_2\left(\overline{v}_{22}+\overline{v}_{21}\right)$$

$$m_1\left(\overline{v}_{11}-\overline{v}_{12}\right)-m_2\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=m_2\left(\cancel{\overline{v}_{22}}-\overline{v}_{21}-\cancel{\overline{v}_{22}}-\overline{v}_{21}\right)$$

$$m_1\left(\overline{v}_{11}-\overline{v}_{12}\right)-m_2\left(\overline{v}_{11}+\overline{v}_{12}\right)=-2m_2\overline{v}_{21}$$

$$-m_1\overline{v}_{11}+m_1\overline{v}_{12}+m_2\overline{v}_{11}+m_2\overline{v}_{12}=2m_2\overline{v}_{21}$$

$$m_1\overline{v}_{12}+m_2\overline{v}_{12}+m_2\overline{v}_{11}-m_1\overline{v}_{11}=2m_2\overline{v}_{21}$$

$$\left(m_1+m_2\right)\overline{v}_{12}+\left(m_2-m_1\right)\overline{v}_{11}=2m_2\overline{v}_{21}$$

$$\left(m_1+m_2\right)\overline{v}_{12}=2m_2\overline{v}_{21}-\left(m_2-m_1\right)\overline{v}_{11}$$

$$\left(m_1+m_2\right)\overline{v}_{12}=2m_2\overline{v}_{21}+\left(m_1-m_2\right)\overline{v}_{11}$$

$$\overline{v}_{12}=\frac{2m_2\overline{v}_{21}+\left(m_1-m_2\right)\overline{v}_{11}}{m_1+m_2} \tag{5.5}$$

$$\overline{v}_{22}=\frac{2m_1\overline{v}_{12}+\left(m_2-m_1\right)\overline{v}_{21}}{m_1+m_2} \tag{5.6}$$

5.5. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_{\substack{Внешних\\сил}}$$

– ***II закон Ньютона*** для *вращательного движения*.

Если $\bar{M}_{\substack{Внешних\\сил}} = 0$ получим:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L} = const\,.$$

Т.о. ***момент импульса*** *механической системы* ***остается неизменным****, если* ***отсутствует суммарный моменты внешних сил****.*

6. Неинерциальные системы отсчёта

6.1. Сила инерции

Рассмотрим систему движения с ускорением относительно инерциальной системы отсчёта.

(X,Y,Z) – инерциальная система,

(X',Y',Z') – неинерциальная система, движущаяся с ускорением относительно инерциальной (*в ней находится наблюдатель, человек*).

Запишем II закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

Пусть:

$\bar{\text{v}}_0$ – скорость (X',Y',Z') относительно (X,Y,Z),

$\bar{\text{v}}$ – скорость человека относительно (X,Y,Z),

$\bar{\text{v}}'$ – скорость человека относительно (X',Y',Z').

$$\bar{\text{v}} = \bar{\text{v}}_0 + \bar{\text{v}}'$$

Тогда, подставив в выражение для ускорения, получаем:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\text{v}}}{dt} = \frac{d(\bar{\text{v}}_0 + \bar{\text{v}}')}{dt} = \frac{d\bar{\text{v}}_0}{dt} + \frac{d\bar{\text{v}}'}{dt} = \bar{a}_0 + \bar{a}'.$$

Подставим во II закон Ньютона:

$$m(\bar{a}_0 + \bar{a}') = \bar{F}$$

$$m\bar{a}_0 + m\bar{a}' = \bar{F}$$

$$m\bar{a}' = \bar{F} - m\bar{a}_0$$

$$m\bar{a}' = \bar{F} + \bar{F}_и$$

Здесь мы ввели *новое обозначение* $\bar{F}_и$ – сила инерции.

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_0 \text{ – \textbf{\textit{сила инерции}}.} \qquad (6.1).$$

Сила инерции есть *инерциальная сила*. Она не является проявлением того или иного взаимодействия и не является силой, с точки зрения определения, введённого нами ранее. Подробнее об этом мы поговорим в конце следующего пункта, после рассмотрения *центробежной силы*.

6.2. Центробежная сила

Пусть система (X',Y',Z') равномерно вращается относительно (X,Y,Z) – неподвижной системы отсчёта. Пусть в системе отсчёта (X',Y',Z') покоится материальная точка (*тело*).

Тогда в (X,Y,Z):

$$m\bar{a}_{цс.} = \bar{F} \ ,$$

$\bar{F} - m\bar{a}_{цс.} = 0$ – условие покоя в (X',Y',Z').

Ведём обозначение $\qquad \bar{F}_{ц.б.} = -m\bar{a}_{цс.}$.

$$F_{ц.б.} = -\frac{m\text{v}^2}{R} = -m\omega^2 R \tag{6.2}$$

– ***центробежная сила***.

Тогда уравнение для состояния покоя во вращающейся системе отсчёта (X',Y',Z') принимает вид:

$$\bar{F} + \bar{F}_{ц.б.} = 0 \, .$$

Как и в предыдущем пункте, для того, чтобы использовать в рассматриваемой системе (*неинерциальной*) отсчёта II закон Ньютона, нам необходимо ввести дополнительную нефизическую силу – *инерциальную силу (силу инерции в общем понимании этого термина)*. В данном случае, это *центробежная сила*. Как мы говорили ранее, *сила* – есть мера взаимодействия и определяется тем или иным взаимодействием. *Инерциальные силы* ***не определяются никаким взаимодействием***. Они являются следствием попытки применить законы динамики, справедливые для инерциальных систем отсчёта к неинерциальным. Эти силы на самом деле есть проявление свойства инерции тела – попытки тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

6.3. Сила Кориолиса

В условиях предыдущей задачи, пусть материальная точка движется по окружности с центром, лежащим на оси вращения с некоторой линейной скоростью:

$$\left.\begin{aligned} m\bar{a} &= \bar{F} \\ \bar{a} &= \bar{a}_{цс.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{m\text{v}^2}{R} = F \ .$$

Произведение массы тела на его центростремительное ускорение по второму закону Ньютона равно равнодействующей всех сил, действующих на тело.

Причём, следуя введённым нами обозначениям,

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{R} = -F_{ц.б.}.$$

Заметим, также, что по правилу сложения скоростей:

$$\bar{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}' + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{r}}_{\bar{\mathrm{v}}_0},$$

или

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}' + \underbrace{\omega R}_{\mathrm{v}_0}.$$

Здесь:

$\bar{\mathrm{v}}$ – скорость тела относительно системы (X, Y, Z),

$\bar{\mathrm{v}}'$ – скорость тела относительно вращающейся системы (X', Y', Z'),

$\bar{\mathrm{v}}_0$ – скорость самой подвижной системы отсчёта (X', Y', Z') относительно неподвижной системы (X, Y, Z).

Подставим и раскроим скобки:

$$\frac{m(\mathrm{v}' + \omega R)^2}{R} = F$$

Получим:

$$\frac{m\mathrm{v}'^2}{R} + \frac{m\omega^2 R^2}{R} + \frac{2m\mathrm{v}'\omega R}{R} = F.$$

Мы видим, что здесь:

$$\underbrace{m \underbrace{\frac{\mathrm{v}'^2}{R}}_{a'_{ц.с.}}}_{-F'_{ц.б.}} + \underbrace{m \underbrace{\omega^2 R}_{a_{цс.}}}_{-F_{ц.б.}} + \underbrace{m \underbrace{2\mathrm{v}'\omega}_{a_{Кориолиса}}}_{-F_{Кориолиса}} = F.$$

Тогда, пытаясь применить *II закон Ньютона* к *вращающейся системе отсчёта*, и рассматривая вращательное движение в этой вращающейся системе, в правой части, помимо физических сил, мы должны добавить ещё 2-а слагаемых. Первое – это *центробежная сила*, возникающая самой вращающейся системы отсчёта. Второе называется *силой Кориолиса*.

$$ma'_{ц.с.} = F + \underbrace{\left(-m \underbrace{\omega^2 R}_{a_{ц.с.}}\right)}_{F_{ц.б.}} + \underbrace{\left(-m \underbrace{2\mathrm{v}'\omega}_{a_{Кориолиса.}}\right)}_{F_{Кориолиса}}.$$

Первое добавленное слагаемое – интуитивно воспринимаемая нами центробежная сила (*либо с обратным знаком произведение массы на центростремительное ускорение*) в системе отсчёта (X', Y', Z'), если бы та не вращалась, а покоилась относительно инерциальной системы отсчёта и была, таким образом, сама инерциальной. Она должна возникать из-за того, что мы сами движемся в этой системе отсчёта по окружности и, следовательно, с центростремительным ускорением. Тогда нам будет казаться, что в этой системе отсчёта на нас помимо каких-либо других внешних сил, действуют ещё две дополнительные (*на самом деле, не физические*) силы – уже известная нам *центробежная сила*, связанная с вращением нашей системы отсчёта (X', Y', Z') и новая сила, которая получила название *сила Кориолиса*:

$F_{ц.б.} = -m\omega^2 R$ – центробежная сила,

$F_{Кориолиса} = -2m\mathrm{v}'\omega$ – сила Кориолиса.

Последние рассуждения можем пояснить на следующем примере. Пусть мы находимся в некотором помещении и оно, это помещение вращается вокруг совей оси. Допустим, это круглый зал без окон, и он вращается, как большая карусель. Мы можем перемещаться по этому залу под действием силы – скажем, силы наших ног, стоящих на полу, и силы рук, держащихся за перила. Но пока мы стоим или сидим на месте. Мы уже привыкли к тому, что на нас действует глобальная центробежная сила. Её природы мы можем и не знать – мы можем ассоциировать её с неким дополнительным гравитационным полем. И эта ассоциация не надумана (*об этом мы скажем пару слов чуть ниже*). В целом о вращении зала мы можем и не подозревать.

И вот мы решили пробежаться по окружности по периметру зала. Мы вполне рассчитываем на наличие этой глобальной центробежной силы и готовы её компенсировать за счёт наших сил. Мы так же рассчитываем, что наш бег по кругу будет бегом с центростремительным ускорением (*относительно локальной, на самом деле вращающейся системы отсчёта*). И мы также рассчитываем найти в себе силы компенсировать это ускорение (*на самом деле, создать его при своём движении*). Но вот незадача – на нас, оказывается, действует ещё одна сила! На неё мы никак не рассчитывали – мы теряем равновесие и падаем. ☹

В итоге именем:

$$ma'_{ц.с.} = \overline{F} + \overline{F}_{ц.б.} + \overline{F}_{Кориолиса},$$

$$\overline{F}_{ц.б.} = -m\omega^2 R\overline{n},$$

$$\overline{F}_{Кориолиса} = -2m\overline{\mathrm{v}}' \times \overline{\omega}.$$

Либо

$$\bar{F} + \bar{F}_{ц.б.} + \bar{F}'_{ц.б.} + \bar{F}_{Кориолиса} = 0,$$

В общем случае можно показать, что сила Кориолиса будет иметь такое же выражение при произвольном направлении движения во вращающейся системе отсчета. И так.

На материальную точку, движущуюся во вращающейся системе отсчёта, помимо двух центробежных сил будет действовать ещё одна нефизическая сила – сила Кориолиса:

$$\bar{F}_{Кориолиса} = -2m\bar{v}' \times \bar{\omega} \tag{6.3}$$

либо

$$\bar{F}_{Кориолиса} = -2m\left[\bar{v}'; \bar{\omega}\right] \tag{6.4}$$

И окончательно заметим, что в общем случае для сведения *неинерциальной системы отсчёта* к *инерциальной* (*то есть, для того, чтобы иметь возможность использовать в ней законы Ньютона*), нам необходимо добавит ещё три фиктивные силы нефизической природы – *силу инерции*, *центробежную силу* и силу *Кориолиса*. Тогда II закон Ньютона примет вид:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{F}_{и} + \bar{F}_{ц.б.} + \bar{F}_{Кориолиса}, \tag{6.5}$$

где

$\bar{F} = \sum \bar{F}_i$ – равнодействующая всех физических сил,

$\bar{F}_{и} = -m\bar{a}_0$ – сила инерции,

$\bar{F}_{ц.б.} = -m\bar{a}_{ц.с.} = m\omega^2 R\bar{n}$ – центробежная силе,

$\bar{F}_{Кориолиса} = -2m\bar{v}' \times \bar{\omega}$ – сила Кориолиса.

И, наконец, в самом общем случае можно отметить, что что все неинерциальные силы в том или ним роде похожи на силу всемирного тяготения (*в частности, на силу тяжести*). Это сходство не случайно. Следуя математической модели Общей Теории Относительности (ОТО), эти силу имеют общую природу с силой тяжести. *В самом же общем случае*, как было показано Эйнштейном в рамках Общей Теории Относительности (***ОТО***) любую неинерциальную систему можно свести к инерциальной путем добавления некоего фиктивного гравитационного поля.

Приложения

Приложение I.

Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии

Определение I

Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.

Воздуха двойной плотности в двойном объеме вчетверо больше, в тройном – вшестеро. То же относится к снегу или порошкам, когда они уплотняются от сжатия или таяния. Это же относится и ко всякого рода телам, которые, в силу каких бы то ни было причин, уплотняются. Однако при этом я не принимаю в расчет той среды, если таковая существует, которая свободно проникает в промежутки между частицами. Это же количество я подразумеваю в дальнейшем под названиями тело или масса. Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом, как о том сказано ниже.

Определение II

Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.

Количество движения целого есть сумма количеств движения отдельных частей его, значит для массы, вдвое большей, при равных скоростях оно двойное, при двойной же скорости – четверное.

Определение III

Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления , по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Эта сила всегда пропорциональна массе, и если отличается от инерции массы, то разве только воззрением на нее.

От инерции материи происходит, что всякое тело лишь с трудом выводится из своего покоя или движения. Поэтому «врожденная сила» могла бы быть весьма вразумительно названа «силою инерции». Эта сила проявляется телом единственно лишь, когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение в его состоянии. Проявление этой силы может быть рассматриваемо двояко: и как сопротивление и как напор. Как сопротивление – поскольку тело противится действующей на него силе, стремясь сохранить свое состояние; как напор – поскольку то же тело, с трудом уступая силе сопротивляющееся ему препятствия, стремится изменить состояние этого препятствия. Сопротивление приписывается обыкновенно телам покоящимся, напор – телам движущимся. Но движение и покой, при обычном их рассмотрении, различаются лишь в отношении одного к другому, ибо не всегда находится в покое то, что таковым простому взгляду представляется.

Определение IV

Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Сила проявляется единственно только в действии, и по прекращении действия в теле не остается. Тело продолжает затем удерживать свое новое состояние вследствие одной только инерции. Происхождение приложенной силы может быть различное: от удара, от давления, от центростремительной силы.

АКСИОМЫ ИЛИ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ

Закон I

Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

Брошенное тело продолжает удерживать свое движение, поскольку его не замедляет сопротивление воздуха и поскольку сила тяжести не побуждает это тело вниз. Волчок, коего части, вследствие взаимного сцепления, отвлекают друг друга от прямолинейного движения, не перестает вращаться (равномерно), поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха. Большие же массы планет и комет, встречая меньшее сопротивление в свободном пространстве, сохраняют свое как поступательное, так и вращательное движение в продолжение гораздо большего времени.

Закон II

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Если какая-нибудь сила производит некоторое количество движения, то двойная сила произведет двойное, тройная – тройное, будут ли они приложены разом все вместе, или же последовательно и постепенно. Это количество движения, которое всегда происходит по тому же направлению, как и производящая его сила, если тело уже находилось в движении, при совпадении направлений прилагается к количеству движения тела, бывшему ранее, при противоположности – вычитается, при наклонности – прилагается наклонно и соединяется с бывшим ранее, сообразно величине и направлению каждого из них.

Закон III

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Если что-либо давит на что-нибудь другое или тянет его, то оно само этим последним давится или тянется. Если кто нажимает пальцем на камень, то и палец его также нажимается камнем. Если лошадь тащит, камень, привязанный к канату, то и, обратно (если можно так выразиться), она с равным усилием оттягивается к камню, ибо натянутый канат своею упругостью производит одинаковое усилие на лошадь в сторону камня и на камень в сторону лошади, и насколько этот канат препятствует движению лошади вперед, настолько же он побуждает движение вперед камня. Если какое-нибудь тело, ударившись в другое тело, изменяет своею силою его количество движения на сколько-нибудь, то оно претерпит от силы второго тела в своем собственном количестве движения то же самое изменение, но обратно направленное, ибо давления этих тел друг на друга постоянно равны. От таких взаимодействий всегда происходят равные изменения не скоростей, а количеств движения, предполагая, конечно, что тела никаким другим усилиям не подвергаются. Изменения скоростей, происходящие также в противоположные стороны, будут обратно пропорциональны массам тел, ибо количества движения получают равные изменения. Этот закон имеет место и для притяжений, как это будет доказано в поучении.

Вернуться в раздел «динамика».

Литература

Основная литература

1.
    a. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 1. Механика — М, СПб: Лань, 2011.
    b. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. Том 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика — М, СПб: Лань, ~2011
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.

Дополнительная литература

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. 1. Механика. — М: …, 2014.

Здесь и далее гиперссылка указывает на электронный версию учебника не обязательно этого, возможно одного из предыдущих изданий. В списке литературы приведено наиболее последнее из известных мне изданий. По гиперссылке можно получить наиболее последнее из имеющихся в сети электронных версия этого учебника.

Литература по курсу дисциплины «физика»

Основная литература:

1.
    a. Савельев Н.В. Курс общей физики. В 5-и т. Т 1, 2, 3, 4, 5 — М,СПб: Лань, ~2011;
    b. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. Т 1, 2, 3 — М,СПб: ~ 2011;
2. Иродов И.Е. Основные законы [физики] (Учебное пособие в 5-и книгах). — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2013-2014:
    a. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.
    b. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.
    c. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2015.
    d. Иродов И.Е. Физика макросистем. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2013.
    e. Иродов И.Е. Квантовая механика. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, ….

Дополнительная литература:

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. 1, 2, 3, 4, 5.. — М: …, 2014(?).

Задачники:

4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики: Учебное пособие. – 11-е изд., перераб. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985., – 384 с.
5. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учебное пособие для студентов втузов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Интеграл-Пресс, 1997. – 544 с.: ил.
6. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики: Учебное пособие для студентов технических вузов. – Изд. 3-е, испр. и доп. – СПб.: Книжный мир, 2006., – 328 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – Изд. 2-е, испр. – … , 1988 г., – 447 с.

Нерекомендуемая литература:

1. Детлов Б.М., Яворски .Б.М. Курс физики.
2.
    a. Трофимова Т.И. Курс физики.
    b. Трофимова Т.И. Физика.

Вернуться к содержанию…

Осташев Владимир Борисович

Учёная степень: кандидат технических наук
Учёное звание: доцент
Должность: доцент кафедры общей физики СПбГТИ(ТУ)

Личный сайт:

http://ostashevvb.spb.ru

Вкладки:

«В помощь детям» – конспекты лекций, методические материалы, вопросы к экзамену

«О себе» – контактная информация

Вернуться к содержанию…

Кафедра общей физики

МЕХАНИКА –
Конспект лекций

Владимир Борисович Осташев

Отпечатано с оригинал-макета Формат 60×90 $1/16$
Печатных листов 6,6 Тираж __ экз.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)
(**СПбГТИ (ТУ)**)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Отпечатано в типографии ______________, т. +7-____________

цена 0 руб. 00 коп.